

OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER
HEINRICH BRANDT

SERIES PRIMA

OPERA MATHEMATICA
VOLUMEN SEXTUM DECIMUM SECTIO ALTERA

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

BASILEAE MCMXXV

VENDITIONI EXPONUNT
B. G. TEUBNER LIPSIÆ ET BEROLINI
ORELL FÜSSLER TURICI ET LIPSIÆ

COMMENTATIONES ANALYTICAE

AD THEORIAM SERIERUM INFINITARUM PERTINENTES

VOLUMEN TERTIUM SECTIO ALTERA

EDIDIT

CARL BOEHM

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

BASILEAE MCMXXXV

VENDITIONI EXPONUNT
B. G. TEUBNER LIPSIAE ET BEROLINI
ORELL FÜSSLI TURICI ET LIPSIAE

Vol. 1.
Pt. 2.

ÜBERSICHT

ÜBER DIE BÄNDE 14, 15, 16, 16* DER ERSTEN SERIE

EINLEITUNG

In den Bänden 14, 15, 16, 16* der ersten Serie sind 82 EULERSche Abhandlungen über unendliche Reihen, Produkte und Kettenbrüche vereinigt. Sie bilden zusammen mit dem ersten Band von EULERS *Introductio in analysin infinitorum* (Lausanne 1748, *Opera omnia* Ia) einen der wichtigsten Ausschnitte aus EULERS Gesamtwerk. Einzelne jener 82 Abhandlungen stehen in enger Berührung mit gewissen Teilen der *Introductio* oder der *Institutiones calculi differentialis*¹⁾ (Petropoli 1755, *Opera omnia* Ia), weitaus die meisten gehen über den Rahmen der *Introductio* hinaus und mehr als eine bildet den Ausgangspunkt für sehr bedeutende Forschungen der späteren Zeit; es seien hier hervorgehoben die Theorie der Gammafunktion, die Ableitung der Funktionalgleichung der RIEMANNschen Zetafunktion und die Untersuchung der hypergeometrischen Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)}{1 \cdot 2 \gamma(\gamma-1)} x^2 + \dots$$

(EULER selbst verstand übrigens im Anschluß an WALLIS unter *series hypergeometricae* etwas ganz anderes; vgl. S. XI). Die geniale Herleitung der binomischen Reihe (in d. *Introductio* S. 171).

1) Der Hauptinhalt dessen, worüber im ersten Abschnitt dieser Übersicht berichtet wird, findet sich auch sowohl in den *Institutiones calculi differentialis* wie auch mit Ausnahme der EULERSchen Summenformel in der *Introductio*. In diese hat EULER außerdem das Allgemeine seiner Untersuchungen über Kettenbrüche aufgenommen (siehe diese Übersicht VI) und einige Beispiele. Besonders wie die Kettenbrüche für quadratische Irrationalitäten, für $\frac{1}{e-1}$ und den BROUCCERSchen Kettenbruch für $\frac{4}{\pi}$. Für diesen einen einfachen Beweis zu finden und womöglich den unbekannten BROUCCERSchen Beweis wiederzufinden, war immer wieder das Bemühen EULERS (vgl. B 123, 522, 616, 745; *Opera omnia* Ia, p. 296 und 323; Ia, p. 325; Ia, p. 44; Ia*, p. 13 und 186; ferner diese Übersicht S. LXXX und CI).

Abhandlung 465) hätte EULER wohl in seine *Introductio* aufgenommen, sow CAUCHY in seine *Analyse algébrique* und ABEL in seine Untersuchungen über die Potenzreihen aufgenommen hat¹⁾, wenn er sie zur Zeit, als er die *Introductio* besessen hätte.

Zweifellos ist der Gehalt der EULERSchen Arbeiten über unendliche Algorithmen nicht ausgeschöpft, und es wäre für junge Forscher, die mit dem Rüstzeug, das wir den zwei Jahrhunderten seit EULERS Anfängen verdanken, eine lohnende Aufgabe, das EULERSche Gedankengut mit dem kritischen Geiste und den strengeren Verfahren der neueren Zeit zu durchdringen und damit neu zu beleben. Mögen die Bände 14–16 der *Opera* solche Forschung anregen und erleichtern.

In der folgenden Übersicht betrachten wir die Abhandlungen der Bände 14–16 nicht in der Reihenfolge ihrer Entstehung, sondern teilen sie in sieben entsprechende Gruppen, was natürlich nicht ohne Willkür möglich ist; viele der vorliegenden Arbeiten gehören eigentlich mehreren jener Gruppen an und nicht wenige stehen in engem Zusammenhang mit Untersuchungen EULERS, die in anderen Bänden der *Opera* *omnia*, insbesondere in den Bänden 13–15 über Integralrechnung Platz finden.

In die erste Gruppe haben wir 14 Abhandlungen (25, 41, 46, 47, 55, 61, 597, 617, 642, 664, 746) aufgenommen, in denen EULER zwei seiner Glanzleistungen wieder von neuen Gesichtspunkten und in neuem Zusammenhang, manchmal allerdings lediglich wiederholend betrachtet, nämlich erstens seine Summenformel, die man heute so bezeichnet²⁾:

1) AUGUSTIN CAUCHY, *Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique*, 1^{re} Edition, Paris 1821; Oeuvres, série 2, tome 3. — NIELS HENRIK ABEL, Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots$, Journal für die reine und angewandte Mathematik 1829, S. 31; Oeuvres, éd. SYLOW-LIE, Bd. 1, S. 219. — CAUCHYS *Analyse algébrique* EULERS *Introductio* nicht zu denken ist, hat für die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts die gleiche Bedeutung wie der erste Band der *Introductio* für die vorhergehenden Jahrzehnte. In gleichem Stoffgebiete der erste große Fortschritt über die *Introductio* hinaus, und in erster Linie in der schärferen Fassung der Begriffe, insbesondere auch des Konvergenzbegriffs, im Zusammenhang damit steht die unbedingte Ablehnung des Gebrauchs divergenter Reihen. CAUCHY und dann auch durch ABEL in scharfem Gegensatz zur Auffassung EULERS die Ausführungen auf S. XII–XIV dieses Berichts.

2) Die Summenformel hat bald nach EULER und zweifellos unabhängig von ihm MAC LAURIN gefunden: *A Treatise of fluxions*, Edinburgh 1742, art. 829, Bd. 2, p. 104. Wie bei EULER als Beispiel die Summation der Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$ mit dem Ergebnis $\frac{\pi^2}{6}$ (vgl. (9a) S. XIX), doch erkennt MAC LAURIN nicht die Übereinstimmung mit

$$(1) \quad \int_a^{a+x} f(t) dt = x \left[\frac{f(a+x) + f(a)}{2} \right] - \frac{B_2 x^2}{2!} [f'(a+x) - f'(a)] - \frac{B_4 x^4}{4!} [f'''(a+x) - f'''(a)] \\ \dots - \frac{B_{2p-2} x^{2p-2}}{(2p-2)!} [f^{(2p-3)}(a+x) - f^{(2p-3)}(a)] + R$$

oder so:

$$(2) \quad \int_a^{a+nh} f(x) dx = h \left[\frac{f(a) + f(a+nh)}{2} + \dots + f(a+(n-1)h) \right] - \frac{B_2 h^2}{2!} [f'(a+nh) - f'(a)] - \frac{B_4 h^4}{4!} [f'''(a+nh) - f'''(a)] \\ \dots - \frac{B_{2p-2} h^{2p-2}}{(2p-2)!} [f^{(2p-3)}(a+nh) - f^{(2p-3)}(a)] + R,$$

wobei R das Restglied bedeutet, dem man verschiedene Formen geben kann, und \sum

die Summation der Reihen $s_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ mit dem Ergebnis

$$(3) \quad s_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}.$$

Die BERNOULLISCHEN Zahlen¹⁾

$$(4) \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_3 = B_5 = \dots = B_{2k+1} = 0, \\ B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \dots$$

verbinden diese auf den ersten Blick scheinbar weit auseinander liegenden Gegenstände

Encyclopaedie der math. Wiss. (Bd. II 1, 1, Leipzig 1899–1916, S. 167) der Verfasser des Artikels II A 3 von „einer von MAO LAURIN gefundenen und gewöhnlich EULER zugeborenen Summenformel“ spricht, so ist dies ganz abwegig, da zwei Abhandlungen EULER die Summenformel vor MAO LAURINS *Treatise* erschienen sind. Ob EULER die STIRLINGSCHE (JAMES STIRLING, *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serie finitarum*, London 1730, propositio 28, p. 129), die auf den Sonderfall $f(x) = \log x$ der STIRLINGSCHE Formel hinausläuft, vor seiner ersten i. J. 1732 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung über diese gekannt hat, läßt sich nicht feststellen.

1) Die ersten fünf von Null verschiedenen dieser Zahlen finden sich zuerst in *conicelandi* (Basel 1713) des JAKOB BERNOULLI S. 98. Die Bezeichnungsweise ist schwankend. EULER (z. B. I 16, p. 93) und viele andere nach seinem Vorgang mit Außerachtlassung des Vorzeichens BERNOULLISCHE ZAHLEN die fol-

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \frac{691}{2730}, \dots;$$

Es möge hier noch, um an späterer Stelle (S. XXVII) den Bericht über
 sehe Abhandlungen zu erleichtern, eine Formel Platz finden, die man erhält
 Gleichung (2) für gerades $n = 2m$ und mit der Abkürzung $a + 2mh = b$ s

$$\begin{aligned} & f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(2m-1)h) + f(a+2mh) \\ (2') \quad & = \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + \frac{B_2 h}{2!} [f'(b) - f'(a)] + \frac{B_4 h^3}{4!} [f'''(b) - f'''(a)] \\ & + \cdots + \frac{B_{2p-2} h^{2p-3}}{(2p-2)!} [f^{(2p-3)}(b) - f^{(2p-3)}(a)] + R' \end{aligned}$$

und sie von der gleichartigen Gleichung

$$\begin{aligned} & 2[f(a) + f(a+2h) + f(a+4h) + \cdots + f(a+(2m-2)h) + f(a+2mh)] \\ (2'') \quad & = f(a) + f(b) + \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + \frac{B_2 2^2 h}{2!} [f'(b) - f'(a)] + \frac{B_4 2^4 h^3}{4!} [f'''(b) - f'''(a)] \\ & + \cdots + \frac{B_{2p-2} 2^{2p-2} h^{2p-3}}{(2p-2)!} [f^{(2p-3)}(b) - f^{(2p-3)}(a)] + R'' \end{aligned}$$

abzieht. Man erhält so:

$$\begin{aligned} & f(a) - f(a+h) + f(a+2h) - f(a+3h) + \cdots - f(a+(2m-1)h) + f(a+2mh) \\ (2a) \quad & = \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{B_2 h(2^2 - 1)}{2!} [f'(b) - f'(a)] + \frac{B_4 h^3(2^4 - 1)}{4!} [f'''(b) - f'''(a)] \\ & + \cdots + \frac{B_{2p-2} h^{2p-3}(2^{2p-2} - 1)}{(2p-2)!} [f^{(2p-3)}(b) - f^{(2p-3)}(a)] + R''' \end{aligned}$$

Die zweite Gruppe, welcher die 10 Abhandlungen 19, 20, 43, 189, 190, 652, 661 angehören, enthält Arbeiten über die Gammafunktion¹⁾ und im An-

gelegentlich (*Opera omnia* I₁₆, p. 598) die folgenden:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \cdot 5 & 13 \cdot 691 & \\ 6, & 30, & 42, & 30, & 66, & 2730 & , \dots \end{array}$$

an anderer Stelle (I₁₆, p. 56) wieder die hieraus durch Verdoppelung entstehende
 Anmerkung 3 auf S. 92 von Bd. I₁₆, der noch der Hinweis auf SBERBENNICKS
 Abhandlungen (S) Bd. 16, Nr. 10, 1903 anzufügen ist, wo die ersten 90 von N
 BERNOULLISCHEN Zahlen berechnet werden. EULER selbst hatte von den Zahlen L
 berechnet (E 393, *Opera omnia* I₁₆, p. 93). Weitere Literatur bei ELY, *Amer*
Mathematics, Bd. 5, 1882, p. 228.

1) Wegen der Bezeichnung dieser Funktion siehe die Anmerkung 1 S. XI
 p. LVIII—LXV.

Funktion, die von EULER durch Ausdehnung des Symbols $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ auf nicht ganzzahlige Veränderliche, also durch Interpolation gewonnen wurde, die EULERSchen Arbeit über Interpolation überhaupt. Außerdem ist eine Einzelschrift (nämlich 583) über die EULERSche Konstante, die er selbst meist C , gelegentlich auch O , A oder λ nannte, während heute die Bezeichnung γ üblicher ist¹⁾, in diese Gruppe aufgenommen wegen der Beziehung dieser Konstanten zur Γ -Funktion. Die Abhandlungen dieser zweiten Gruppe überdecken sich teilweise mit solchen der Bände 17–19 (Integrale). Die Trennung wurde so vorgenommen, daß den Bänden 14, 15, 16, 16* die Abhandlungen zugewiesen wurden, die nicht im wesentlichen mit bestimmten Integralen arbeiten, obwohl eine strenge Scheidung nicht möglich war.

In der dritten Gruppe werden 13 Arbeiten (128, 246, 447, 561, 562, 592, 636, 656, 686, 703, 704, 747, 810) besprochen, die sich mit den trigonometrischen Funktionen und mit trigonometrischen Reihen beschäftigen, in der vierten Gruppe 9 Abhandlungen (46, 575, 584, 637, 663, 709, 726, 743, 768) über die binomische Reihe und über Binomialkoeffizienten.²⁾

Die fünfte Gruppe enthält 17 Abhandlungen (72, 247, 326, 352, 432, 453, 477, 485, 507, 551, 565, 616, 684, 685, 710, 722, 736), die verschiedenen anderen Funktionen und Reihen gewidmet sind.

In der sechsten Gruppe sind 11 Abhandlungen (71, 122, 123, 281, 522, 550, 551, 593, 742, 745, 750) über unendliche Produkte und Kettenbrüche vereinigt.

Die siebente Gruppe endlich enthält 7 EULERSche Arbeiten (74, 125, 275, 280, 706, 809) über die Berechnung der Zahl π . Für die bekannten π -Berechner ADRIAN ROMANUS, LUDOLF VAN CEULEN, ABRAHAM SHARP u. a. (vgl. *Opera omnia* I, 4, p. 245) kamen die EULERSchen Vorschriften freilich zu spät, ähnlich wie die besten Verfahren zur Berechnung der Logarithmen erst erfunden wurden, als die Tafeln im wesentlichen schon fertig waren.

Wir beendigen, indem wir an die zuletzt erwähnten Rechenarbeiten anknüpfen, die Einleitung mit einigen Bemerkungen über die wissenschaftsgeschichtliche Bedeutung der hier vorliegenden EULERSchen Leistungen auf dem Gebiete der unendlichen Reihen, Produkte

1) C in E 43, I, 4, p. 94; E 583, I, 6, p. 571 und in den *Inst. calc. diff.*, I, 10, p. 33; *Const.* in E 47, I, 4, p. 118; O in E 393, I, 5, p. 115; A in E 368, I, 7; λ in E 432, I, 6, p. 13. Die Bezeichnung γ , die wir in dieser Übersicht benutzen, rührt von MASCHERONI her; siehe daselbst I, 10, p. LXIV.

2) Wir bezeichnen den Koeffizienten von x^n in der Potenzreihe für $(1+x)^a$ mit $\binom{a}{n}$. EULER schrieb $\left[\frac{a}{n} \right]$ (in E 575 und 584) und $\left(\frac{a}{n} \right)$ (in E 663, 709, 726, 768).

3) Die gegen Ende des 18. Jahrhunderts unter der Leitung PROSVYS vorgenommene Neuberechnung der Tafeln („*Tables du Cadastre*“, nicht gedruckt), wodurch es gelang, die letzten Fehler der alten Tafeln zu beseitigen, benutzt zur Berechnung der Primzahllogarithmen eine Reihe von Zahlen (man möchte sagen sonderbarer Weise) bei EULER nicht vorzukommen scheint. Auch die vi

und Kettenbrüche, wobei wir schon deswegen ganz im Allgemeinen verbleiben, wir den dann folgenden Einzelausführungen dieses Berichts nicht allzusehr vorziehen.

EULERS unermüdliebe Freude am Zahlenrechnen war stets beherrschend, danken, die Tragweite solcher Verfahren darzutun, die geeignet waren, die Arbeiten durch die Überlegung des Mathematikers abzukürzen. Rechenfehler groß sind ihm selten unterlaufen; doch befolgt er nicht die strenge, erst später Geltung gelangte Regel, daß der Fehler nicht mehr als eine halbe Einheit der beibehaltenen Stelle betragen darf.¹⁾ Bei den halbkonvergenten Reihen, die er ausgiebig benutzte und die er auch in ihrer Wesensart richtig erkannte, wies er sicherem Takt die Stelle, an der am günstigsten mit der Summation aufgehört werden sollte, an. War er sich wenigstens an Beispielen klar darüber, daß es sich um divergente Reihen handelt.²⁾ Aber auch solchen divergenten Reihen, die keineswegs zur Klasse der halbkonvergenten gehören, kam nach seiner Auffassung, die sich freilich schon bei einigen Zeitgenossen³⁾ und erst recht später nicht durchsetzen konnte, ein bestimmter Wert zu, den er durch folgende Festsetzung sicher stellen zu können glaubte: Der Wert einer unendlichen Reihe ist der Wert des endlichen Ausdrucks, durch dessen Entwicklung die Reihe entsteht.⁴⁾ Diese Auffassung hat mit gehöriger Einschränkung hinter den WEIERSTRASSschen Begriff der analytischen Fortsetzung einen bestimmten Sinn und damit eine gewisse Berechtigung erlangt. Nachdem man noch im 17. und 18. Jahrhundert die EULERSchen mit divergenten Reihen arbeitenden Ansätze als unrettungslos verfehlt angesehen hatte, braucht man heute nur manche seiner

weniger sinnvolle Berechnung der Zahl π auf 200 Dezimalstellen durch DASE (Werke reine und angewandte Mathematik 27, 1844, S. 198) benutzt keine der von EULER in seiner Abhandlung 809 (I, p. 267) besonders empfohlenen und wohl auch zweckmäßigsten Methoden, sondern die ganz zum Gedankenkreise dieser Abhandlung gehörige, dort aber zufällig erwähnte Formel

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}.$$

1) Oder mit den Worten von C. F. GAUSS (Werke Bd. 3, S. 237): „daß die Annäherung dem wahren Wert allomal so nahe kommen soll, als bei der gewählten Anzahl von Stellen möglich ist.“

2) Vgl. S. 111 ff.

3) Abhandlung 245 *de seriebus divergentibus*, Opera omnia II, p. 511.
4) Reihen, Tübingen 1898, § 11.

Made in einem Briefe an CHR. GOLDBACH vom 7. August 1749: „*expressionis illius finitae, ex cuius evolutione illa series de quelques célèbres géomètres du 18^{me} siècle publiée*“ (Opera omnia, p. 324); später fast wörtlich ebenso E 247, § 12 (Opera omnia, p. 176).

etwas anders zu begründen, um ihnen einen guten Sinn zu geben. Die Anfänge der in diesem Jahrhundert weit entwickelten Theorie der divergenten Reihen, die ein Teil der Theorie der analytischen Fortsetzung ist und die schon sehr wichtige Ergebnisse erzielt hat¹⁾, gehen also wie so viele Anfänge der heutigen Mathematik auf EULER zurück; es ist freilich keineswegs so, als ob EULER hinterher gegen CAUCHY und ABEL recht behalten hätte.²⁾ Seine vorhin erwähnte Definition der Reihensumme ist nicht nur, weil sie die Möglichkeit mehrdeutiger Funktionen keine Rechnung trägt³⁾, sondern vor allem wegen des folgenden Mangels unhaltbar. Wenn die Reihenglieder reine Zahlen sind (und nicht Funktionen einer Veränderlichen), wie im Falle

$$(5) \quad 1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \dots,$$

so ist ein endlicher Ausdruck, durch dessen Entwicklung die Reihe entsteht, nicht eindeutig vorhanden. Ist z. B. die Summe der Reihe (5) der Wert, den die durch die Reihe

$$(6) \quad \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots$$

definierte ganze transzendente Funktion von s für $s = -k$ annimmt, oder ist sie der Wert, den die durch die Reihe

$$(7) \quad x - 2^k x^2 + 3^k x^3 - 4^k x^4 + \dots$$

definierte rationale Funktion von x mit dem Nenner $(1+x)^6$ an der Stelle $x = 1$ annimmt. Daß diese beiden Werte miteinander übereinstimmen, ist ein beweisbarer merkwürdiger Lehrsatz (vgl. S. LXXXII), der aber so lange nur wie ein zufälliges Ergebnis erscheinen konnte, als er nicht als Folge eines viel allgemeineren Lehrsatzes der Funktionentheorie erschlossen werden kann, was zweifellos möglich ist. Durch einen solchen könnte wohl die EULERsche Definition für die Summe einer divergenten Reihe an Genauigkeit und Tragweite gewinnen.

Die Summen der Reihen

$$(8) \quad 1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \dots \quad (\text{für } k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

wovon (5) ein besonderer Fall ist, hat EULER unter Zugrundelegung der Definition

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2^k x^2 + 3^k x^3 - 4^k x^4 + \dots)$$

mehrfach ermittelt; sein Ergebnis ist für $k > 0$

$$(10) \quad 1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \dots = \frac{2^{k+1} - 1}{k+1} B_{k+1,4})$$

1) Siehe z. B. K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 3. Aufl., Berlin 1931, Kapitel XIII.

2) Vgl. die Anmerkung 1 S. VIII.

3) Welches ist z. B. nach EULER der Wert der Reihe $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$ für $x = 3$ oder $x = -3$?

4) Die Existenz des Grenzwerts (9) ist, da es sich um eine für $x = 1$ nicht unendlich werdende rationale Funktion handelt, klar; um seinen Wert zu finden, ersetze man in (9) x durch

e^{-t} mit $t \rightarrow 0$, dann erhält man für $k \geq 0$ den mit $(-1)^{k+1}$ multiplizierten Quotienten für $t \rightarrow 0$ der Funktion

d. h. man erhält: $\frac{2^{k+1}-1}{k+1} B_{k+1}(-1)^{k+1}$. Das Ergebnis gilt auch für $k=0$; man den Faktor $(-1)^{k+1}$ weglassen (vgl. (4) S. IX). Siehe K. KNORR, *Theorie der unendlichen Reihen*, 2. Aufl., Berlin, S. 508. Euler gelangt zur Gleichung wegen als den hier angegebenen; vgl. S. XXVIII und LXXXIII.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_{ni} - s_i = 0 \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots$$

2) Siehe beispielsweise E 247 (*de seriebus divergentibus*), § 8, I₁₄, p. 592.

Viel stärker divergente Reihen haben dagegen nach EULER eine endliche Summe. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$, deren Summe $\frac{1}{1-2} = -1$ ist.

anderen kaum erreichter Geschicklichkeit herstellte. Allgemeine Prinzipien dagegen, abstrakte Begriffsbildungen und logische Verfeinerungen waren seinem Wesen fremd. Ihn lockte der Einzelfall; neue Funktionen zu bilden und zu untersuchen war für ihn eine Lieblingsaufgabe (vgl. das in der Abhandlung 565 aufgestellte Programm). Heutzutage lernt man ungeheuer viel Funktionentheorie, aber genau kennt man nur sehr wenige Funktionen, und das sind vor allem diejenigen, die EULER in seiner *Introductio* behandelt hat. Außerdem kennen einige etwa noch die EULERSche Gammafunktion und die ebenfalls von EULER zuerst untersuchte RIEMANNsche Zetafunktion. Und wenn jemand gar mit der hypergeometrischen Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ vertraut ist, so steht er gleichfalls auf EULERSchem Boden. Nur bei den elliptischen Funktionen hatte er trotz vieler Bemühungen kein Glück; ihre Entdeckung mußte er seinen Nachfolgern überlassen. Aber sollte nicht sonst in EULERS Arbeiten noch mancher Keim schlummern, der zu späterer Blüte berufen ist?

Bei den unendlichen Kettenbrüchen, deren erste zusammenfassende Darstellung man vielen Einzeluntersuchungen man ihm verdankt, kümmert sich EULER fast gar nicht um die Konvergenz.¹⁾ Diese Lücke auszufüllen, konnte nicht Aufgabe dieses Berichtes sein; ein junger Forscher, der O. PERRONS *Lehre von den Kettenbrüchen* (Leipzig und Berlin 1911) durchgearbeitet hat, mag in der Untersuchung von Zahlen und Funktionen, die EULER durch Kettenbrüche dargestellt hat, ein lohnendes Betätigungsfeld finden.

Der Leser der Abhandlungen wird selbst merken, wie EULERS mathematische Darstellung und Ausdrucksweise die Schwerfälligkeit der Zeit vor ihm bald verliert und immer vollkommener wird. Daß der Gebrauch von *Indices* erst später allgemein wird, während EULER für die Reihen s_2, s_4, s_6, \dots etwa P', Q', R', \dots (z. B. E 41) oder $\int_0^1 \frac{1}{x^2}$ usw. (z. B. E 477) schreibt, mag vielleicht mit Schwierigkeiten des Drucks zusammenhängen. Der Fortschritt in der mathematischen Ausdrucksweise, der seitdem über EULER hinaus erzielt wurde, erscheint gering gegenüber dem Fortschritt, den die EULERSchen Arbeiten über eine vorausgehende Zeit zeigen, wofür ihm zwar nicht das alleinige, aber doch das Hauptverdienst zukommt.²⁾

Um die Darstellung dieser Übersicht zu vereinfachen und leichter lesbar zu machen, bedienen wir uns der heutigen Schreibweise von Ausdrücken und Formeln statt der EULERSchen Bezeichnungen, die außerdem nicht einheitlich sind, sondern von einer Abhandlung zur andern wechseln.

1) Einfache Konvergenzüberlegungen finden sich in Abhandlung 281, § 34; *Opera omnia* I, p. 48.

2) Vgl. EULERS Ausführungen über den Wert einer guten Bezeichnung in der Einleitung zur Abhandlung 246 (*Opera omnia* III, p. 542).

1. DIE EULERSCHE SUMMENFORMEL.

DIE REIHEN $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$. DIE BERNOULLISCHEN ZAHLEN.

Die EULERSche Summenformel findet sich mit kaum angedeuteten
20. Juni 1732 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung 25

Methodus generalis summandi progressiones

(*Opera omnia* I₁₁, p. 42—72) unter folgender Form

$$(1) \quad s = \int t \, du + \alpha t + \frac{\beta dt}{dn} + \frac{\gamma d^2 t}{dn^2} + \frac{\delta d^3 t}{dn^3} + \dots,$$

wobei t das allgemeine (zum Index n gehörige) Glied einer Reihe, s die Summe aller ersten Glieder bedeutet. Für die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ werden Rekurrenzen

$$(2) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}, & \beta &= \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6}, & \gamma &= \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24}, \\ \delta &= \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120}, & \varepsilon &= \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} + \frac{1}{720}, \end{aligned}$$

angegeben, bis das Bildungsgesetz klar ist, das natürlich auf die allgemeine Formel von S. XXI für die BERNOULLISCHEN Zahlen hinausläuft; es ergibt sich

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} (= -B_1), & \beta &= \frac{1}{12} \left(= \frac{B_2}{2!} \right), & \gamma &= 0 \left(= \frac{B_3}{3!} \right), \\ \delta &= \frac{1}{720} \left(= -\frac{B_4}{4!} \right), & \varepsilon &= 0 \left(= \frac{B_5}{5!} \right), & \zeta &= \frac{1}{30240} \left(= -\frac{B_6}{6!} \right). \end{aligned}$$

Die Summenformel wird in den darauffolgenden Beispielen der A. ein einziges Mal verwendet. Die als Beispiele gebrachten Reihensummen hängen mehr im wesentlichen darauf, daß aus Reihen, deren Glieder Funktionen von n sind, die Summen bekannt sind, durch Multiplikation mit Polynomen

rentiation und Integration wieder Reihen mit angebbarer Summe gebildet werden, z. B. aus der geometrischen Reihe, aus der Reihe für e^x usw.¹⁾

Ein Beispiel, nämlich EULERS Ansatz für die Integraldarstellung der Summe

$$(4) \quad \sum_{v=1}^n \frac{x^v}{(av + b)^m},$$

möge in dieser Übersicht genügen, ohne daß es einen vollen Begriff von EULERS Erfindungskraft geben könnte. Im Falle $m = 1$ findet er, daß diese Summe gleich

$$(5) \quad \frac{1}{a} x^{-\frac{b}{a}} \int_0^x t^{\frac{b}{a}} (1-t^n) \frac{dt}{1-t}$$

ist, was man durch Differenzieren leicht bestätigt. Den EULERSchen Ausdruck für (4) bei beliebigen ganzzahligen $m > 0$ findet man am einfachsten aus (5) durch m -maliges Differenzieren nach b (EULER geht anders vor; die von ihm gefundene Summe für (4) steht II, S. 56). Wir heben noch den vereinfachten Fall $x = 1$, $a = 1$, $b = 0$, $m = 2$, $n = \infty$ hervor

$$(6) \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} = \int_0^1 \frac{\log t}{1-t} dt,$$

weil wir mit dieser Formel zu einer Frage gelangen, welche die Mathematiker des 18. Jahrhunderts (außer EULER insbesondere auch die Brüder JAKOB und JOHANN BERNOULLI) in hohem Maße beschäftigt hat, nämlich zu der Frage²⁾: Kann man den Wert der Reihe

$$(7) \quad s_2 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}$$

in einfacher Weise durch bekannte Größen ausdrücken? und weiter: Gelingt dies für die allgemeineren Reihen

$$(8) \quad s_n = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^n} \quad (n = 2, 3, 4, 5, \dots)$$

Ihre Beantwortung wurde zu einem der schönsten Triumphe EULERS.

1) Statt des Buchstabens e gebraucht hier EULER noch c ; vgl. hierzu die Anmerkung zu S. 128 von Band Ia und die Anmerkung zu S. 143 der Abhandlung G1 von II4, der ersten Stelle jenes Bandes, wo e in der üblichen Bedeutung benutzt wird. In der nämlichen Abhandlung G1 führt EULER auch für den halben Umfang des Einheitskreises die Bezeichnung π ein, die sich zum ersten Male 1706 bei W. JONES findet: *Synopsis Palmariorum Matheseos* S. 243.

2) Nüheres siehe in dem II4, S. 156—176 wieder abgedruckten Aufsätze P. STRÄCKELS (an *Bibliotheca Mathematica* 83, 1907—1908, p. 37—54); *Eine vergessene Abhandlung LEONHARD EULERS über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen*; vgl. auch die Anmerkung

Die Formel (6) findet sich schon in einer der Abhandlung 25 vor-
 lich in der am 5. März 1731 der Akademie vorgelegten Abhandlung 20

De summatione innumerabilium progressionum

(*Opera omnia* I₁₄, p. 25—41); diese hat in Anlage und Inhalt vieles mit
 scheidet sich von ihr durch die weniger vollkommene Darstellung und den
 punkt: es wird dort die schon in der vorhergehenden Abhandlung 19
 gestellt, für Summen wie z. B. (4) Ausdrücke zu finden, die (wie (5)) mit
 zahliges n einen Sinn haben; deshalb wurde diese Abhandlung in die zw
 polation usw.) der vorliegenden Übersicht aufgenommen. Sie ist aber für
 Gruppe zu besprechenden Reihen (8) insofern wichtig, als an ihrem Ende
 der rechten Seite von (6) und damit die Reihe s_2 in (7) auf 6 Dezima
 wird und zwar auf eine ausgezeichnete und sehr merkwürdige Weise.
 der Art EULERS, einen Ausdruck (wie die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}$), dessen Natur zu
 zur Aufgabe gesetzt hatte, zunächst zahlenmäßig zu untersuchen. Zur
 mittels des Integrals auf der rechten Seite von (6) ging er nun so
 dieses Integral in zwei:

$$-s_2 = \int_0^x \frac{\log t}{1-t} dt + \int_x^1 \frac{\log t}{1-t} dt,$$

wo x irgend eine Zahl zwischen 0 und 1 ist; in dem zweiten Integrale
 stitution $t = 1 - \tau$ und erhielt mit $y = 1 - x$

$$\begin{aligned} s_2 &= -\int_0^x \frac{\log t}{1-t} dt + \int_0^y \frac{\log (1-\tau)}{-\tau} d\tau \\ &= -\sum_{v=1}^{\infty} \int_0^x t^v \log t dt + \sum_{v=1}^{\infty} \int_0^y \frac{\tau^{v-1}}{v} d\tau \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \left[-\frac{t^v}{v} \log t + \frac{t^v}{v^2} \right]_{t=0}^{t=x} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{y^v}{v^2} \\ &= \log(1-x) \log x + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{x^v}{v^2} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{y^v}{v^2}. \end{aligned}$$

zu S. 180 von Band 1s und drei daselbst, wie auch in dem schon erwähnte
 satze angeführte Veröffentlichungen G. ENSTRÖMS, *Biblioth. Math.* 4s, 18
 p. 248; 7s, 1906—1907, p. 126.

1) Danach ist die Angabe der Anmerkung 2, I₁₄, p. 162 des in der
 merkung erwähnten STÄCKELschen Aufsatzes zu berichtigen und zu ergänzen

Wählt man hier, was am einfachsten ist, $x = y = \frac{1}{2}$, so findet man

$$(9) \quad s_2 = (\log 2)^2 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{4^2} + \dots$$

Die nunmehr auf der rechten Seite stehende Reihe konvergiert recht gut, und kann als bekannt angesehen werden. Als ermittelten Wert für s_2 gibt EULER¹⁾

$$(9a) \quad s_2 = 1,644934;$$

er ist einschließlich der letzten Stelle richtig. Benutzt man die von EULER erst in Abhandlung 41 (siehe S. XXII der vorliegenden Übersicht) bewiesene Gleichung $s_2 =$

so besagt (9), daß die Potenzreihe $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{p^2}$ für $x = \frac{1}{2}$ den Wert $\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2$ annimmt.

Hierauf ist EULER in späteren Arbeiten mehrfach zurückgekommen (siehe insbesondere *Opera omnia* 10*, p. 118).

Eine von der soeben besprochenen ganz verschiedene Berechnung der Reihe $s_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$ ebenfalls auf 6 Stellen, von denen aber 2 falsch sind, findet sich in der Abhandlung 41.

Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi

(*Opera omnia* 14, p. 101—107), die am 9. Juni 1735 der Petersburger Akademie vorgelesen wurde. Die Berechnung von s_2 ist dort ein Beispiel für die Anwendung einer von EULER gefundenen Formel mechanischer Quadratur, die eine Verbesserung der Sehnen trapezometrie ist. Letztere ist identisch mit folgender Näherungsformel

$$(10) \quad f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \int_1^{n+1} f(x) dx + \frac{f(1)}{2} - \frac{f(n+1)}{2}.$$

EULER verbessert unter der Voraussetzung $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ diese Näherung, indem er rechts noch die Glieder

$$(11) \quad \frac{f(1) - f(2)}{12} - \frac{f(n+1) - f(n+2)}{12}$$

hinzufügt, und verwendet sie (ähnlich wie seine Summenformel) nicht sowohl, um die (10) rechts stehende Integral wie vielmehr um die links stehende Summe zu berechnen.

1) Schon vorher hatte JAMES STIRLING 9 Stellen dieses Reihenwertes, wovon 8 richtig, mittels einer geistreichen Reihentransformation berechnet: *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, London 1730, p. 29. In dieser Schrift werden auch ähnliche Interpolationsaufgaben gelöst wie in den EULERSCHEN Abhandlungen 19 und (14, p. 1 und 25).

Steht links eine unendliche Reihe, so kommt natürlich nur das erste Glied in Betracht. Im Falle der Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{1}{p^2}$ berechnet EULER die Summe

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{10^2} = 1,549768$$

und dann mit $f(p) = \frac{1}{(10+p)^2}$ nach (10), (11) näherungsweise den Rest

$$\frac{1}{11} + \frac{7}{12} \frac{1}{121} + \frac{1}{12 \cdot 144} \cdots$$

Als weiteres Beispiel gibt EULER die ganz entsprechend durchgeführte Summe $\sum_1^{1000000} \frac{1}{p^2}$, für die er den Wert 14,392669 findet.

Eine dritte von den beiden erwähnten völlig verschiedene Berechnung der Summe $s_2 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{p^2}$ findet man in der Abhandlung 47

Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generatae

(*Opera omnia* II, p. 108—123), die am 13. Oktober 1735 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde. In dieser gibt EULER zuerst eine formale Herleitung seiner Summenformel (S. 25) ohne Beweis mitgeteilten Summenformel. Er bedient sich zu diesem Zweck der Taylorsche Reihe, die er unter Erwähnung TAYLORS und seiner *Methodus* durch Differenzenbildung gewinnt. Seine Schlußformel ist

$$(12) \quad S = \int X dx + \frac{X}{1 \cdot 2} + \frac{dX}{2 \cdot 3! dx} + \frac{d^2 X}{6 \cdot 5! dx^2} + \frac{d^3 X}{6 \cdot 7! dx^3} + \frac{3 d^4 X}{10 \cdot 9! dx^4} \\ + \frac{691 d^5 X}{210 \cdot 13! dx^5} + \frac{35 d^6 X}{2 \cdot 15! dx^6} + \frac{3617 d^7 X}{30 \cdot 17! dx^7} + \cdots$$

die in die Formel (2) von S. IX, abgesehen von dem bei EULER stets $h=1$ übergeht, wenn man $X=f(x)$ mit $x=a+nh$ und $h=1$ setzt, unter S die Summe $f(a)+f(a+1)+\cdots+f(a+n)$ versteht und in (12) für die unteren Grenze a herrührenden Glieder eine passende Konstante hinzusetzt.

Für die Koeffizienten werden die nämlichen Formeln angegeben wie in der Abhandlung 25; vgl. S. XVI und nachher (16). Den Zusammenhang mit den Zetafunktionen erkennt EULER noch nicht. Es ist sogar zu vermuten, daß ihm die in Basel erschienene *ars coniectandi* nicht bekannt war. Denn als erstes

Formel leitet er, ohne JAKOB BERNOULLI zu erwähnen, die sogenannten BERNOULLI-
schen Polynome ab:

$$q_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \left[x^{n+1} + \binom{n+1}{1} B_1 x^n + \binom{n+1}{2} B_2 x^{n-1} + \dots + \binom{n+1}{n} B_n x \right]$$

symbolisch geschrieben

$$q_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} [(x+B)^{n+1} - B^{n+1}],$$

die im Falle eines ganzzahligen positiven x die Summen

$$0^n + 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (x-1)^n \quad (x = 1, 2, 3, \dots)$$

gestellt werden.¹⁾ Bei EULER finden sich die BERNOULLI'schen Polynome nicht in der
einen Form (13), sondern mit ihren Zahlenkoeffizienten ausgeschrieben für $n = 1, 2, \dots, 16$.

$x = 1$ geht (14) in die von EULER immer wieder benutzte, aber im Grunde schon
von BERNOULLI²⁾ und A. DE MOIVRE³⁾ bekannte Rekursionsformel für die in der Sum-
menformel auftretenden Koeffizienten über

$$1 + \binom{n+1}{1} B_1 + \binom{n+1}{2} B_2 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n = 0,$$

symbolisch geschrieben

$$(B+1)^{n+1} - B^{n+1} = 0.$$

EULER und vor ihm wird die Formel nicht allgemein, sondern nur für die ersten
Werte von n angeschrieben, bis ihr Bildungsgesetz klar ist; auch verwendet EULER in
seinen frühern Arbeiten nicht die BERNOULLI'schen Zahlen B_r selbst, sondern die mit ihnen
zusammenhängenden S. XVI genannten Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Als weiteres Beispiel zu seiner Summenformel behandelt EULER in der Abhandlung 47
die Summe

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x}$$

findet

$$S = \text{Const.} + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} \\ + \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} + \frac{691}{32760x^{12}} - \frac{1}{12x^{14}} + \text{etc.}$$

1) Ersetzt man in Formel (2) von S. XVI $f(a)$ durch a^n , a durch 0, h durch 1, n durch x ,
sofort sie den Ausdruck der Summe (15) durch die Funktion (13).

2) *Ars coniectandi*, Basel 1713, p. 97, 98. Dasselbst auch Formel (13) allgemein und noch
anders für $n = 1, 2, 3, \dots, 10$.

3) *Miscellanea analytica*, London 1730, *Complementum* S. 19.

geübten Rechners von der rechts stehenden divergenten Reihe so viele Glieder gerade für einen guten Näherungswert nötig sind; er erwähnt ausdrücklich (Falle $x=1$), daß die Reihe nicht konvergent ist. (Definiert hatte EULER schon in der Abhandlung 20, über die S. XLV berichtet werden wird.) Es folgt in der Abhandlung 47 noch die vorhin erwähnte dritte Berechnung der Reihe

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

von der 10 Glieder addiert werden und der Rest mittels der Summenformel abge-

Das Ergebnis wird auf 20 Stellen genau angegeben, d. h. viel genauer, als die gebene Rechnung es liefern konnte. Daraus darf man schließen, daß die Übung mit $\frac{\pi^2}{6}$ EULER aufgefallen war, als er die Abhandlung 47 abfaßte.²⁾ Bekannt ist erst in der Abhandlung 41, die 7½ Wochen später als 47 der Petersburger Akademie vorgelegt worden ist. Gegen Schluß der Abhandlung 47 werden noch die Zahlenwerte der Reihen $s_3 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{p^3}$ und $s_4 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{p^4}$ auf 15 Stellen (die alle bis auf die 3 letzten richtig sind) mitgeteilt.

Die soeben genannte Abhandlung 41

De summis serierum reciprocarum

(*Opera omnia* II, p. 73—86) wird für die Geschichte der Mathematik merkwürdig, als die, in der EULER den Lehrsatz, daß die Reihen

$$(8) \quad s_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots$$

für gerades n (>0) zu π^n in einem rationalen Verhältnis

$$(19) \quad a_{2k} = \frac{s_{2k}}{\pi^{2k}}$$

(vgl. S. IX (3)) stehen, zum ersten Male veröffentlicht hat, und zwar mit einer, die zwar keinesfalls allen Anforderungen an Strenge (auch nicht denen der da-

1) Sie sind alle richtig; der Wert, den EULER an späteren Stellen seiner Vorlesungen gewöhnlich in der 16. Stelle falsch. Vgl. II, p. 115, Anmerkung.

2) Ob ihm diese Übereinstimmung schon bei Berechnung von s_2 in den Abhandlungen 20 und 25 aufgefallen war, ist zweifelhaft, zumal der in 25 mitgeteilte Wert in der 5. Stelle falsch ist.

S. XXVI) entsprach, der aber leicht zu einem strengen ausgebaut werden konnte, was er im wesentlichen von EULER selbst geschehen ist (vgl. S. XXXII–XXXVII). Außerdem zeigte EULER in der Abhandlung 41, daß die Reihen

$$a_n = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \dots$$

für ungerades $n = 2k + 1$ zu π^n in rationalem Verhältnis

$$b_{2k+1} = \frac{a_{2k+1}}{\pi^{2k+1}}$$

ist, und zwar ist

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{B_{2k}}{2^{2k+2}(2k)!} \pi^{2k+1},$$

wo B_{2k} ganze Zahlen sind:

$$B_0 = 1, \quad B_2 = -\frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{1}{42}, \quad B_6 = -\frac{1}{420}, \quad B_8 = \frac{1}{1680}, \quad \dots$$

nennt die B_n EULERSCHE Zahlen und setzt noch $B_1 = B_3 = B_5 = \dots = 0$. Die EULERSCHEN Zahlen kann man aus den Rekursionsformeln

$$(B + 1)^n + (B - 1)^n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

finden, die sich sofort aus der erzeugenden Funktion

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{B_{2v}}{(2v)!} x^{2v}$$

erhalten.¹⁾ Die Reihen

$$t_n = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \dots$$

verknüpft man mit den Reihen s_n zusammen, da offenbar

$$s_n = t_n + \frac{1}{2^n} s_n, \quad \text{also} \quad t_n = \frac{2^n - 1}{2^n} s_n, \quad s_n = \frac{2^n}{2^n - 1} t_n$$

Es ist also nach Gleichung (3) von S. IX

$$t_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} - 1}{2 \cdot (2k)!} \pi^{2k} B_{2k}.$$

Man betrachtet in der Abhandlung 41 (indem er sich wegen der s_n auf den soeben fest-

1) Vgl. E 130, *Opera omnia* I₁₄, insbesondere p. 428; in E 41 kommen nur die gleich-
die BERNOULLISCHEN und die EULERSCHEN Zahlen enthaltenden Rekursionsformeln vor, von
S. XXV die Rede ist.

(28)

$$\tau_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{(-3)^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{(-7)^n} + \dots$$

zu Grunde legt, aus der

(29)

$$\tau_{2n+1} = \sigma_{2n+1}, \quad \tau_{2n} = t_{2n}$$

folgt.

Bei seinen Überlegungen, deren Ziel die Bestimmung der rati

(30)

$$d_n = \frac{\tau_n}{\pi^n}$$

(also schließlich

(31)

$$d_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}-1}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}, \quad d_{2k+1} = (-1)^k \frac{E}{2^{2k+2}}$$

ist, geht er davon aus, daß man durch die Koeffizienten eines Poly

(32)

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

mit den Nullstellen x_v die Potenzsummen

(33)

$$S_1 = \sum \frac{1}{x_v}, \quad S_2 = \sum \frac{1}{x_v^2}, \quad S_3 = \sum \frac{1}{x_v^3}$$

in bekannter Weise ausdrückt¹⁾:

(34)

$$S_1 = -c_1, \quad S_2 = -c_1 S_1 - 2c_2, \quad S_3 = -c_1 S_2 - c_2 S_1$$

EULER nimmt dieses Verfahren auch dann in Anspruch, wenn (32) d
reihe ist, und schließt beispielsweise so:

Die Funktion

(35)

$$1 - \frac{\sin x}{\sin \alpha} = 1 - \frac{x}{1! \sin \alpha} + \frac{x^3}{3! \sin \alpha} - \frac{x^5}{5! \sin \alpha} + \dots$$

hat die Nullstellen²⁾

(36)

$$x_{2\nu} = \alpha + 2\nu\pi, \quad x_{2\nu+1} = \pi - \alpha + 2\nu\pi \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

also ist

(37)

$$1 - \frac{x}{1! \sin \alpha} + \frac{x^3}{3! \sin \alpha} - \frac{x^5}{5! \sin \alpha} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{x}{\pi - \alpha}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi + \alpha}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi + \alpha}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi - \alpha}\right) \dots$$

1) Wegen der Entdeckungsgeschichte dieser sog. GIRARD-NEWTON
Anmerkung zu S. 178 von I₈.

2) EULER schreibt in der Abhandlung 41 noch p für π ; vgl. die An

nach (34):

$$S_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi + \alpha} + \frac{1}{-\pi - \alpha} + \frac{1}{2\pi + \alpha} + \frac{1}{-2\pi - \alpha} + \cdots = \frac{1}{\sin \alpha},$$

$$S_2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\pi + \alpha)^2} + \frac{1}{(\pi + \alpha)^2} + \frac{1}{(2\pi + \alpha)^2} + \frac{1}{(-2\pi + \alpha)^2} + \cdots = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$S_3 = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{(\pi + \alpha)^3} + \frac{1}{(-\pi - \alpha)^3} + \frac{1}{(2\pi + \alpha)^3} + \frac{1}{(-2\pi + \alpha)^3} + \cdots = \frac{1}{\sin^3 \alpha} - \frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

Für einen späteren Zweck schreiben wir die erste dieser Formeln nochmals, wobei α durch $\frac{m\pi}{n}$ ersetzen (m, n seien ganze Zahlen > 0):

$$\frac{\pi}{n} \sin \frac{m\pi}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \cdots$$

Wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, werden die rechten Seiten der Gleichungen (38) rationale Zahlen; die Reihen (38) aber für die S_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) werden gleich

$$\frac{2}{\pi^\nu} \left(\frac{1}{1^\nu} + \frac{1}{(-3)^\nu} + \frac{1}{5^\nu} + \frac{1}{(-7)^\nu} + \cdots \right) = \frac{2\tau_\nu}{\pi^\nu} = 2d_\nu \text{ (vgl. (30))},$$

die Formeln (34) liefern, wenn man für S_1, S_2, S_3, \dots diese Werte $2d_1, 2d_2, 2d_3, \dots$ setzt, Rekursionsformeln für diese Koeffizienten, d. h. also (vgl. (31)) gemischte Rekursionsformeln für die EULERSchen und die BERNOULLIschen Zahlen. EULER berechnet die Zahlen d_n für $n = 1, 2, 3, \dots, 7$.

Indem er $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ wählt, findet er weitere Reihen, wie

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \cdots$$

er bemerkt, daß die erste dieser Reihen sich schon bei NEWTON findet.¹⁾

Gegen Schluß der Abhandlung benutzt er an Stelle von (37) den Ansatz

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2 \pi^2} \right),$$

die Reihen s_{2k} nochmals und ohne Berufung auf ihren Zusammenhang mit den t_{2k} ($2k = 12$) zu summieren.

1) Siehe I₁₄, S. 82, Anmerkung.

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{v^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

hatte EULER vor Drucklegung der Abhandlung 41 in einem nicht mehr
DANIEL BERNOULLI mitgeteilt, der sie an seinen Vater JOHANN BERNOULLI
Dieser fand daraufhin, genau wie EULER, mittels der Reihe für $\frac{\sin x}{x}$ die
öfentlichte sie später (ohne EULER zu nennen) im vierten Bande seiner
In einem Briefe²⁾ teilte er EULER am 2. April 1737 seine Herleitung
gleichzeitig Bedenken gegen deren Beweiskraft: man hätte vor allem bei
die Funktion $\sin x$ keine imaginären Nullstellen hat. Später (nach dem
Abhandlung 41) griff DANIEL BERNOULLI die Beweisführung EULERS noch
dem er erklärte, es sei grundsätzlich nicht erlaubt, mit Potenzreihen
zu rechnen; auf EULERS Weise könne man ebensogut beweisen, daß $\sum_1^{\infty} \frac{1}{v^2}$
sei, sondern gleich $\frac{m^2 S^2}{6 n^4}$, wenn S der Umfang, m, n die Längen der großen
Achse irgendeiner Ellipse sind.⁴⁾

Den Einwürfen trug EULER Rechnung in den Abhandlungen 63 und 64 in
Reihenfolge abgefaßt, in der umgekehrten aber gedruckt worden sind.

— — — — —

1) JOHANN BERNOULLI, *Opera omnia*, t. 4, Lausannae et Genevae 1742.

2) Vgl. die schon S. XVII erwähnte Abhandlung P. STÄCKEL'S in BARHART'S

3) *Correspondance math. et phys.* II, p. 477; vgl. auch die in der vor-
genannten Abhandlung STÄCKEL'S II, S. 169.

4) Fällt nämlich die große Achse der Ellipse in die X-, die kleine in die Y-Achse,
ihre Bogenlänge, vom Punkt $x = \frac{m}{2}$, $y = 0$ ab bis zu einem willkürlichen Punkt
so findet man nach einfacher Rechnung (bei passender Wahl des Vorzeichens)
reihe von s :

$$y = s - \frac{2m^2}{3n^4} s^3 + \dots$$

Dann kann man nach EULER so weiterschließen: Die Funktion $y:s$ hat die Entwicklung

$$s = \frac{\nu S}{2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

es ist also

$$1 - \frac{2m^2}{3n^4} s^2 + \dots = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{4s^2}{\nu^2 S^2} \right)$$

und daher

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{m^2 S^2}{6 n^4}$$

gabe von ganz verschiedenen Seiten an und haben fast nichts miteinander gemein. Von diesen beiden entstanden, aber nach ihnen veröffentlicht ist die ebenfalls hierher gehörige Abhandlung 130. Ehe wir über diese drei Abhandlungen, deren jede in ihrer Art bedeutend ist, berichten (und zwar in der Reihenfolge 130, 61, 63), gehen wir kurz auf den Inhalt der ihnen vorausgehenden Abhandlung 55 ein, sowie auf den einiger späterer Abhandlungen (617, 642, 746), die ebenso wie 55 vorzugsweise der Summenformel und nicht den Reihen s_{2n} gewidmet sind.

Die beiden Abhandlungen 55

Methodus series summandi alterius promota

und 617

De summatione serierum, in quibus terminorum signa alternantur

(*Opera omnia* I₁₁, p. 124—137 und I₁₆, p. 47—78), die in einem Abstand von fast 40 Jahren am 17. September 1736 und am 22. Februar 1776 der Petersburger Akademie vorgelegt worden sind, dehnen die Summenformel auf endliche und unendliche Reihen mit abwechselnden Vorzeichen

$$(42) \quad f(a) - f(a + h) + f(a + 2h) - f(a + 3h) + f(a + 4h) - \dots$$

aus; vgl. die Herleitung S. X; EULER gibt sie in der im fünften Abschnitt dieses Berichtes zu besprechenden Abhandlung 352, während er in 55 und 617 genau wie bei der ersten Summenformel den TAYLORSCHEN Lehrsatz benutzt.

Außerdem gibt er in 55 und 617 noch eine Summenformel oder vielmehr eine Umformung für Potenzreihen

$$(43) \quad f(0) + f(1)\xi + f(2)\xi^2 + f(3)\xi^3 + \dots$$

Er entwickelt jeden Koeffizienten $f(v)$ nach Potenzen von v :

$$f(v) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} v + \frac{f''(0)}{2!} v^2 + \frac{f'''(0)}{3!} v^3 + \dots$$

und erhält (43) in der Form

$$(43a) \quad f(0)(1 + \xi + \xi^2 + \dots) + \frac{f'(0)}{1}(\xi + 2\xi^2 + 3\xi^3 + \dots) + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\xi + 2^n\xi^2 + 3^n\xi^3 + \dots) + \dots$$

$$= \frac{f(0)}{1 - \xi} + \frac{f'(0)\xi}{(1 - \xi)^2} + \frac{f''(0)(\xi^2 + \xi)}{2!(1 - \xi)^3} + \frac{f'''(0)(\xi^3 + 4\xi^2 + \xi)}{3!(1 - \xi)^4} + \dots$$

Diese Umformung von (43) ist richtig, wenn $f(v)$ eine ganze rationale oder eine noch gewisser Einschränkung genügende ganze transzendente Funktion ist; es ergibt sich dann auf der rechten Seite von (43a) eine ganze Funktion von $\frac{1}{1 - \xi}$. EULER fügt auf der rechten Seite von (43a) noch überflüssiger Weise $+ \text{Const.}$ hinzu.

Die Summenformel, die EULER für (42) gewinnt, stimmt unter Weglassung des Restglieds mit (2a) S. X überein. Für die auftretenden mit den BERNOULLISCHEN Zahlen verwandten

auf den Endwert $b = \infty$ bezieht, und faßt das Weggelassene in eine nicht näher
Konstante zusammen, die manchmal ohne rechte Begründung gleich Null angenom-
So findet er z. B.¹⁾ in der vorhin erwähnten, im übrigen aber erst spä-
sprechenden Abhandlung 352 im Falle $f(a + \nu h) = (a + \nu h)^m$

$$a^m = (a + h)^m + (a + 2h)^m - (a + 3h)^m + \dots$$

$$\frac{a^m}{2} = \frac{B_2 h (2^2 - 1) m a^{m-1}}{2!} - \frac{B_4 h^3 (2^4 - 1) m (m-1) (m-2) a^{m-3}}{4!} + \dots$$

$$\frac{B_6 h^5 (2^6 - 1) m (m-1) (m-2) (m-3) (m-4) a^{m-5}}{6!} - \dots - \frac{B_{m+1} h^m (2^{m+1} - 1)}{m+1}$$

und daraus für $a = 0$, $h = 1$

$$0^m = 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + \dots = \frac{B_{m+1} (2^{m+1} - 1)}{m+1}$$

in Übereinstimmung mit (10) S. XIII trotz der Fragwürdigkeit der vorstehenden

Die Abhandlung 642 vom 18. März 1776

De singulari ratione differentiandi et integrandi, quae in summis serierum
(*Opera omnia* I₁₆, p. 122—138) enthält nichts grundsätzlich Neues. Es wird ge-
schon auf S. XXI dieser Übersicht erwähnten Polynome $(n+1)$ ten Grades
Gleichung

$$\frac{d\varphi_{n+1}(x)}{dx} = n\varphi_n(x)$$

gentigen. (JAKOB BERNOULLI, den EULER auch hier nicht erwähnt, hat diese Gleichung
ausdrücklich aufgestellt.) Dann wird noch formal gezeigt, wie aus der Summe
die Funktion $f(x)$ die Summenformeln für die Funktionen $f'(x)$ und $\int f(x) dx$

Die Abhandlung 746 endlich vom 13. März 1780

Methodus succincta summas serierum infinitarum per formulas differentiales in
(*Opera omnia* I₁₆, p. 200—213) gibt einen Überblick über EULERS frühere Er-
sichtlich seiner Summenformel in ihrem Zusammenhang mit den BERNOULLI
und den Reihensummen s_{2k} .

Nunmehr besprechen wir die schon S. XXVI/XXVII hervorgehobenen A
130, 61, 63, die zu EULERS wichtigsten über die Reihen s_n gehören.

1) E 352, § 7; *Opera omnia* I₁₆, p. 76.

(*Opera omnia* I₁₄, p. 407—462) bildet eine Fortsetzung und Ergänzung der besprochenen Abhandlung 41, der gegenüber sie zwar nicht hinsichtlich der Strenge, wohl aber im Formalen und in der Darstellung einen erheblichen Fortschritt bedeutet.

EULER geht wieder aus von der allgemeinen Gleichung (vgl. (32))

$$(44) \quad 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{x}{x_r}\right)$$

und von dem besonderen Falle (37) mit den dort daraus gezogenen Folgerungen, bemerkt aber dann folgendes: Wenn die Funktion (44) mit $f(x)$ bezeichnet und $f'(x):f(x)$ in eine Potenzreihe entwickelt wird:

$$(45) \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{x - x_r} = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots,$$

so ist

$$(46) \quad k_n = \sum_1^{\infty} \frac{1}{(-x_r)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Wieder wird wie in E 41 die Anwendung auf $f(x) = 1 - \sin x : \sin \alpha$ oder, da es bei der logarithmischen Differentiation auf einen konstanten Faktor nicht ankommt, auf $f(x) = \sin x - \sin \alpha$

$$(47) \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cos x}{\sin x - \sin \alpha}$$

gemacht. Die Nullstellen x_r des Nenners sind bekannt, vgl. (36). Für $\alpha = 0$, $x_r = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ ergibt sich ihm so aus (47) die Partialbruchreihe der Funktion $\cot x^1)$, für $x = \frac{\pi}{2}$ dagegen die Partialbruchreihe (38) für $\frac{1}{\sin \alpha}$, und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhält EULER

$$(48) \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-\cos x}{1 - \sin x} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 2 \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{4\nu+1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{4\nu+3}{2}\pi} \right) = \sum_0^{\infty} k_\nu x^\nu$$

1) Damit beantwortet sich die von P. STÄCKEL in der S. XVII angeführten Abhandlung (*Opera omnia* I₁₄, S. 172) aufgeworfene Frage, wo sich dieser auf logarithmischer Differentiation beruhende Beweis zuerst gedruckt finde. Brieflich hatte ihn NIKOLAUS BERNOULLI am 13. Juli 1741 an EULER mitgeteilt (*Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St. Pétersbourg 1845, t. II, p. 688); die Abhandlung 130, die den obigen von dem N. BERNOULLI nur unbedeutend abweichenden EULERSCHEN Beweis enthält, war damals schon geschrieben, aber noch nicht gedruckt.

womit die Formeln (40) von S. XXV wiedergewonnen sind, sobald die k_1 bekannt sind. Für diese aber ergeben sich die linearen, schon aus Eulers Recursionsformeln (vgl. (34)) aus der Identität

$$1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) = \left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \right) (-1 + k_1 x)$$

während die Differentialgleichung

$$(49) \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{s^2}{2},$$

der die Funktion $s = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ genügt, Rekursionsformeln liefert, welche zweiten Grade enthalten.

Durch Umformung und Verallgemeinerung der gefundenen Partialbrüche es EULER leicht, die acht Reihen (*Opera omnia* I 14, S. 424)

$$(50) \quad \begin{aligned} &\sum_1^\infty \frac{1}{x^2 - \nu^2}, & \sum_1^\infty \frac{(-1)^\nu}{x^2 - \nu^2}, & \sum_1^\infty \frac{1}{x^2 + \nu^2}, & \sum_1^\infty \frac{(-1)^\nu}{x^2 + \nu^2}, \\ &\sum_1^\infty \frac{1}{x^2 - (2\nu)^2}, & \sum_1^\infty \frac{1}{x^2 + (2\nu)^2}, & \sum_1^\infty \frac{1}{x^2 - (2\nu - 1)^2}, & \sum_1^\infty \frac{1}{x^2 + (2\nu - 1)^2} \end{aligned}$$

durch trigonometrische und Exponentialfunktionen zu summieren.

Nachdem er beispielsweise für die erste dieser Reihen die Summe

$$-\frac{1}{2x^2} + \frac{\pi}{2x \operatorname{tg} \pi x}$$

gefunden hat, gewinnt er die (mit (-1) multiplizierte) dritte, indem er

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{\pi(e^{2\pi x} + 1)}{2x(e^{2\pi x} - 1)}.$$

Dies ist die früheste Stelle, wenn man den Tag der Mitteilung in der *Monatsschrift* den des Drucks als entscheidend ansieht, wo durch Vermittlung des Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen (vgl. S. XXXV dieses Berichts).

Übersichtlich und verhältnismäßig vollständig werden die Potenzen der x in den BERNOULLISchen und die EULERSchen Zahlen enthalten, im Zusammenhange

bruchreihen für die nämlichen Funktionen auch in der *Introductio* zusammengestellt (*Opera omnia* I⁸), die 1748, also zwischen der Mitteilung (1739) und der Drucklegung (1750) von 130 erschienen ist.

Im übrigen enthält diese Abhandlung außer dem schon Berichteten noch manche Bemerkenswerte: z. B. erzeugende Funktion und Rekursionsformeln für die EULERSchen Zahlen ohne Verbindung mit den BERNOULLIschen.¹⁾ Ferner erkennt EULER, daß die Koeffizienten, die bei seiner Summenformel auftreten, die nämlichen sind wie die, die bei der Berechnung der Reihensummen s_{2k} sich ergeben, ohne freilich zu bemerken, daß diese Koeffizienten schon bei JAKOB BERNOULLI vorkommen; sodann gibt er für diese BERNOULLIschen Zahlen die erzeugende Funktion

$$(51) \quad s = \frac{z}{1 - e^{-z}}$$

an, die sich nur im Vorzeichen von z von der jetzt gewöhnlich verwendeten Funktion unterscheidet, und aus der sich die linearen Rekursionsformeln für die BERNOULLIschen Zahlen (vgl. (16), S. XXI) besonders einfach ergeben. Aus der Differentialgleichung, der s genügt,

$$(52) \quad z \frac{ds}{dz} - s = sz + s^2 = 0$$

gewinnt er Rekursionsformeln, die von der zweiten Ordnung in den BERNOULLIschen Zahlen sind.

Nachdem EULER der große Erfolg bei der Summation der Reihen

$$s_{2k} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}}$$

beschrieben war, mußten ihm auch die Reihen

$$s_{2k+1} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2k+1}}$$

reizen. Er berechnete in der Abhandlung 130 deren Werte bis $k=5$ zunächst zahlenmäßig und bildete die Verhältniszahlen der Reihensummen zu π^{2k+1} , wobei sich keine als rational erkennbare Werte ergaben. Dann versuchte EULER den Reihen s_{2k+1} , insbesondere der Reihe s_3 oder vielmehr (was auf dasselbe hinausläuft) der Reihe

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \dots$$

durch Umformung beizukommen. Wenn er die Verfolgung dieses Zieles auch schließlich

1) Vgl. die Anmerkung auf S. XXIII.

aufgab (auch kein späterer Mathematiker hat es erreicht trotz vieler gemachter B so ist in EULERS vergeblichen Versuchen doch so viel von einem hohen Forse halten, daß die diesen Versuchen gewidmeten letzten Seiten der Abhandlung 1 S. 440—462) auch heute noch lesbar bleiben. Es finden sich dort u. a. auch noch unvollkommenen Ansätze für die Funktionalgleichung der RIEMANNschen ζ die dann später in den noch zu erwähnenden Abhandlungen 352 und 432¹⁾ weiter geführt wurden; so gibt EULER z. B. Formeln wie diese

$$1 - 2^{-2} + 3^{-2} - 4^{-2} + \dots = \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots = -\frac{1}{8} = -\frac{2 \cdot 3!}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right),$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \dots = \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 5!}{\pi^6} \left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \dots \right).$$

Auch später hat EULER mit Aufwand von viel Mühe und Scharfsinn versucht, die Zahlenwerte der Reihen s_{2k+1} zu klären, insbesondere in den soeben Abhandlungen 352 und 432, die wohl diesem Versuch ihre Entstehung verdankt.

Den Einwänden, die gegen die Abhandlung 41 erhoben worden waren und gegen die soeben besprochene Abhandlung 130 in Kraft bleiben, begegnete Erfolg in der Abhandlung 61

De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum altera, in qua eadem summationes ex fonte maxime diverso derivantur

(*Opera omnia* IV, p. 138—155), die er zugleich mit sechs anderen Arbeiten (E 62, 83, 284) am 6. September 1742 der Berliner Akademie vorlegte.²⁾

Bei der Inhaltsangabe dieser Abhandlung 61 müssen wir, um den Zusammenhang der Beweise herzustellen, auch auf den Inhalt der soeben genannten Abhandlungen eingehen, sowie auf den der früher entstandenen, aber erst später, 1748, der Akademie vorgelegten und 1750 gedruckten Abhandlung 162. Diese drei Abhandlungen 59, 60, 162

1) *Opera omnia* IV, p. 70 und 131.

2) EULER, der im Juni 1727 einen Monat vor Vollendung seines 20. Lebensjahres nach Rußland gekommen war, war nach 14jährigem Aufenthalt im Juni 1741 nach Deutschland zurückgebrochen, von wo er nach 25 Jahren (im Juni 1766) wieder nach Petersburg zurückkehrte; lebte er noch bis zum 7. September 1783.

Theoremata circa reductionem formularum integralium ad quadraturam circuli.

*De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati
determinatus valor tribuatur,*

Methodus integrandi formulas differentiales rationales unicam variabilem involventes

öffnen den Band I₁₇ (p. 1—34, 35—69, 70—148).

Die Abhandlung 59 knüpft an 41 und 130 an: EULER erkennt, daß man die rechte Seite der Formel (39) von S. XXV auch erhält, wenn man

$$(53) \quad \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1 + x^n}$$

nach Potenzen von x entwickelt und die entstandene Reihe gliedweise zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ integriert:

$$(54) \quad \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1 + x^n} dx = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Dieser Gleichung stellt er in E 59 noch eine zweite ähnliche an die Seite:

$$(55) \quad \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx = \frac{\pi}{n} \cot \frac{m\pi}{n},$$

die er mit den nämlichen Überlegungen wie (54) ableitet: er geht (vgl. S. XXIV (35), (37)) von der Gleichung

$$(56) \quad \begin{aligned} \cos x - \cot \alpha \sin x &= 1 - \frac{x \cot \alpha}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3 \cot \alpha}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5 \cot \alpha}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha + \pi}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha - \pi}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha + 2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha - 2\pi}\right) \dots \end{aligned}$$

aus und gewinnt durch Vergleichung der Koeffizienten von x auf beiden Seiten die Partialbruchreihe¹⁾

$$(57) \quad \cot \alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + \pi} + \frac{1}{\alpha - \pi} + \frac{1}{\alpha + 2\pi} + \frac{1}{\alpha - 2\pi} + \dots,$$

1) Genau so verfährt auch EULER in der *Introductio*; im Grunde ist dieser Beweis von dem auf logarithmischer Differentiation der Sinusfunktion beruhenden nicht allzusehr verschieden, denn der Übergang von (56) zu (57) geschieht durch

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - \cot \alpha \sin x - 1) \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha - x) - \sin \alpha}{x \sin \alpha} = - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{d \sin \alpha}{d \alpha}.$$

die für $\alpha = \frac{m\pi}{n}$ in folgende übergeht:

$$(58) \quad \frac{\pi}{n} \cot \frac{m\pi}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-2n} + \frac{1}{m+2n} + \frac{1}{m-3n} + \dots$$

Hieraus folgt (55) wie (54) aus (39).

Den hier mitgeteilten Ansatz (56) für die Gleichung (57) hatte EULER schon in seiner Abhandlung 130 gemacht, dort aber nicht weiter verfolgt, da er dort das auf Differentialrechnung der Sinusfunktion hinauslaufende Verfahren bevorzugte.

Die gewonnenen Formeln (54), (55) mußten EULER zum Versuch einer Zerlegung mittels unbestimmter Integration und Einsetzen der Grenzen reizen; dazu er die Nullstellen der Funktionen $x^n \pm 1$. Hier setzt Abhandlung 162 ein, in der er die Nullstellen $x^n \pm a^n$ (und allgemeinere) in ihre Faktoren und die rationalen Funktionen

$$(59) \quad \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1 \pm x^n}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, worauf unbestimmt integriert wird. Die Werte der bestimmten Integrale mit den Grenzen 0 und 1, d. h. die Formeln (54), (55), werden in E 60 angegeben.

In der uns beschäftigenden Abhandlung 61 des Bandes I₁ benutzt EULER die Zerlegung der Nullstellen des Polynoms $x^n - a^n$, um die Funktion

$$(60) \quad \frac{\left(1 + \frac{x^m - 1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x^m - 1}{n}\right)^n}{2x^m - 1}$$

(deren Grad m für ungerades n gleich $n-1$, für gerades n gleich $n-2$ ist), als Produkt reeller Faktoren zweiten Grades darzustellen:

$$(61) \quad \prod_{v=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) - \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) \cos \frac{2v\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2v\pi}{n}},$$

und erhält dann durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$

$$(41) \quad \frac{\sin x}{x} = \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{v^2 \pi^2}\right).$$

Bei Gelegenheit dieser Ableitung des Sinus-Produktes¹⁾, die ohne Schwierigkeiten streng gemacht werden kann, hat EULER zum ersten Male die berühmten nach

1) Im neunten Kapitel der *Introductio* (Ia, p. 153) werden auf die nämliche Art die unendlichen Produkte für $e^x - 1$, $e^x - e^{-x}$, $\cos x$ u. a. hergeleitet.

namnten Formeln

$$(62) \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

veröffentlicht; zuvor hatte er an CHR. GOLDBACH in zwei Briefen vom 9. Dezember 1741 und vom 8. Mai 1742 in etwas anderer Form gleichbedeutende Formeln mitgeteilt.¹⁾

Nachdem EULER in E 61 auf die angegebene Weise die Herleitung des Sinusprodukts und damit die der Reihenwerte s_{2k} in Ordnung gebracht hatte, fügte er den in der Überschrift dieser Abhandlung angezeigten zweiten Beweis für den Zusammenhang dieser Reihenwerte mit π^{2k} an.²⁾ Er geht dabei von den Gleichungen (54), (55) aus und setzt voraus, daß sie auf dem Wege über das unbestimmte Integral gewonnen wurden. Zunächst bemerkt er, daß aus Stetigkeitsgründen aus ihnen die für jedes s (nicht nur für $s = \frac{m}{n}$, wie zunächst gezeigt worden war) richtigen Gleichungen folgen:

$$(63) \quad \frac{\pi}{\sin \pi s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} + \frac{1}{3-s} - \frac{1}{3+s} - \dots$$

$$(64) \quad \pi \cot \pi s = \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3-s} + \frac{1}{3+s} - \dots$$

Durch fortgesetzte Differentiation dieser Gleichungen und Einsetzen des Wertes $s = \frac{1}{2}$ findet EULER die sämtlichen Werte s_{2k} , σ_{2k+1} (vgl. S. XXV (38)). So liefert z. B. (64) durch Differentiation aus (64) entstehende Gleichung

$$(65) \quad -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi s} = -\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \dots \right)$$

für $s = \frac{1}{2}$ die Reihensumme

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Noch viele andere Reihen werden durch Einsetzen besonderer Werte für s summiert, z.

$$(66) \quad \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \dots;$$

diese Reihe erhält man, wenn man (63) differenziert und dann $s = \frac{1}{4}$ einsetzt.

1) Vgl. die Anmerkungen zu I₁₄, S. 142 und I₈, S. 147, wie auch S. XXX der vorliegenden Übersicht.

2) Der zweite Beweis stimmt allerdings auf seinem letzten Stück mit dem ersten überein, da beide die Partialbruchreihen für die trigonometrischen Funktionen verwenden. Aber die gegenwärtige Ableitung dieser Partialbruchreihen rechtfertigt es, von einer zweiten Herleitung der Reihenwerte s_{2k} zu sprechen.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

(*Opera omnia* I₁₄, p. 177—186). Sie ist im Jahre 1743, also früher als 61 erschienen, zwar in dem von EULER sonst nie zu Veröffentlichungen benutzten *Journal littéraire, de Suisse et du Nord*¹⁾, und wurde, nachdem sie lange verschollen war, von PAUL STÄCKEL wieder aus Licht gezogen; vgl. dessen in I₁₄, S. 156—176 veröffentlichten Einführungsaufsatz. Sie enthält für den Summenwert $\frac{\pi^2}{6}$ der in der (61) genannten Reihe zwei neue Ableitungen (also die dritte und vierte unserer Aufg.), doch glückte es nicht, das benutzte Summierungsverfahren auf die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ für $k > 1$ auszudehnen. EULER ist auf die Beweise dieser Arbeit später niemals mehr gekommen, während er seine anderen Beweise für die Gleichungen $s_{2n} = a_{2n} \pi^{2n}$ in häufiger Wiederholung veröffentlichte. In der Abhandlung 63 geht EULER aus von der

$$(67) \quad \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 = \int_0^x \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^x \left(x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dots \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Er setzt $x = 1$ und integriert rechts gliedweise, so findet er seinen dritten Beweis für die Gleichung

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Der dann folgende vierte Beweis ist dem dritten ähnlich: EULER leitet mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Reihe²⁾

$$(68) \quad \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \frac{x^4}{4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{x^6}{6} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{x^8}{8} + \dots$$

als Lösung der Differentialgleichung

$$(69) \quad (1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

1) Die Abhandlung 63 und die in den *Mémoires de l'académie des sciences de Paris* erschienene Abhandlung 352 (I₁₅, p. 70) sind die einzigen der Bände I₁₄—16*, die in französischer Sprache abgefaßt sind; alle anderen sind lateinisch geschrieben. Diese beiden sind auch mit der Abhandlung 61, die in den *Miscellanea Berolinensia* erschienen ist, die ebenfalls nicht in Petersburg gedruckt worden sind.

2) Über die Entdeckungsgeschichte dieser Reihe siehe I₁₄, S. 165.

ab. Aus (68) folgt dann

$$(70) \quad \frac{1}{6} (\arcsin x)^3 = \int_0^x \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \frac{x^4}{4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{x^6}{6} + \dots \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und nach gliedweiser Integration für $x = 1$:

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots \right),$$

d. h.

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Den Schluß der Abhandlung 63 bildet eine Zusammenstellung der Reihensummen $s_{2n} = a_{2n} \pi^{2n}$ bis $n = 13$, wobei in den Faktoren a_{2n} die BERNOULLISCHEN Zahlen eiges abgespalten werden, ohne daß diese Bezeichnung und ein Hinweis auf JAKOB BERNOULLI vorkämen.

Es liegt nahe zu fragen, ob es außer den erwähnten EULERSCHEN Beweisen für die Gleichung $s_2 = \frac{\pi^2}{6}$ und für die allgemeinere Summation der Reihen s_{2k} noch andere gibt. Da ist zunächst zu bemerken, daß man die Reihenwerte s_{2k} sehr leicht gewinnt, wenn man die BERNOULLISCHEN Polynome (siehe S. XXI (13)) im Intervall (0,1) durch trigonometrische Reihen darstellt. Auch dieser Ansatz geht in seinem einfachsten Falle auf EULER zurück (siehe die Abhandlung 555, I⁶, insbesondere S. 440.³) Wegen der Einzelheiten dieser Ableitung der Reihenwerte s_{2k} darf auf die Lehrbücher, z. B. auf K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Leipzig 1922, S. 362 verwiesen werden. Im gleichen Buch S. 259 findet man noch einen weiteren Beweis (den sechsten unserer Zählung) für die Gleichung $s_2 = \frac{\pi^2}{6}$. Die Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$ wird mittels der „MARKOFFSchen Transformation“ in die Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{3(2r-1)!^2}{(2r)!}$ verwandelt; das ist aber das Sechsfache dessen, was sich ergibt, wenn man in der Reihe (68) für $(\arcsin x)^2$ für x den Wert $\frac{1}{2}$ einsetzt, wodurch man $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = 6 \left(\frac{\pi}{6} \right)^2$ erhält.

Ähnlich wie die S. XXVII genannten Abhandlungen 55, 617, 642, 746, die sich hauptsächlich mit der Summenformel beschäftigen, bedeuten die in dieser ersten Gruppe noch z

1) Wenn EULER am Schluß der Abhandlung 63 sagt, er habe bereits zwei verschiedene Methoden zur Berechnung dieser Faktoren gegeben, so meint er zweifellos die beiden Rekursionsformeln, von denen S. XXXI die Rede war; die STRACKELSCHE Annahme I¹⁴, p. 168, Anmerkung dürfte nicht zutreffen.

2) Vgl. auch S. LIV dieses Berichts.

berechnet haben.

In der am 18. August 1768 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung

De summis serierum numeros BERNOULLIANOS involventium

(*Opera omnia* I15, p. 91—130) wird nochmals der Zusammenhang zwischen der

Summenformel und der Summation der Reihen $s_{2n} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2n}}$ hergestellt durch

der BERNOULLISCHEN Zahlen, die bis B_{34} angegeben werden (I15, p. 93)¹⁾; hier endlich in Titel und Text auf JAKOB BERNOULLI hingewiesen. Sonst enthält die Abhandlung meist Wiederholungen. So werden z. B. ausgehend von der Formel²⁾

$$(71) \quad \int_0^1 z^{m-1} (\ln z)^n = (-1)^n \frac{n!}{m^{n+1}}$$

für die Reihensummen s_2, s_3, \dots Integraldarstellungen angegeben:

$$(72) \quad s_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 \frac{(\ln z)^n}{1-z} dz$$

und entsprechend für die Teilsummen

$$(73) \quad S_{m,n} = 1 + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{m^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^1 \frac{1-z^m}{1-z} (\ln z)^{n-1} dz.$$

EULER benutzt die rechte Seite dieser Formel, um $S_{m,n}$ auch für nicht ganzzahlige n zu definieren, was insbesondere für $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ zu einfachen Ergebnissen führt. So wird die EULERSCHE KONSTANTE nochmals berechnet.

In der am 2. Oktober 1775 der Petersburger Akademie vorgelegten, aber erst im Jahre 1785 in den *Opuscula analytica* veröffentlichten Abhandlung 597

De seriebus potestatum reciprocis methodo nova et facillima summandi

(*Opera omnia* I15, p. 701—722) wiederholt EULER den Inhalt früherer Abhandlungen.

1) Vorher schon *Institutiones calculi differentialis*, Petropoli 1755, partis posterioris, (*Opera omnia* I10, p. 319).

2) EULER leitet sie mittels teilweiser Integration ab; noch einfacher gewinnt er sie an anderer Stelle (E 463, I7) zeigt, durch Differentiation nach m auf beide Seiten der Gleichung $\int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m}$.

von 61. Im Gegensatz zu der in der Überschrift ausgesprochenen Meinung EULERS in der Abhandlung 597 weder stofflich noch hinsichtlich des Beweisverfahrens etwas Neues, S. 712 stehende Tafel der rationalen Zahlen $a_{2n} = s_{2n} : \pi^{2n}$ bis $n = 17$ steht E 393, und die am Schlusse der Abhandlung 597 mitgeteilte, auf 25—28 Stellen berechnete Tafel der Werte $\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$ war schon in der Abhandlung 128 (vgl. S. LVII) veröffentlicht.

der am 3. Oktober 1776 vorgelegten Abhandlung 664

Exercitatio analytica

(*Opera I*, p. 235—240) wird gezeigt, daß man den Weg, der von der Produktentwicklung der Kosinusfunktion zu den Reihenwerten s_{2n} führt, auch in umgekehrter Richtung legen kann, m. a. W. daß man jenes Produkt ableiten kann, indem man von anderweitig bekannt vorausgesetzten Reihenwerten s_{2n} ausgeht.

II. INTERPOLATION. DIE GAMMAFUNKTION DIE EULERSCHE KONSTANTE

Die den ersten der vier Bände, über die hier berichtet wird, eröffnende *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice* (*Opera omnia* I₁₁, p. 1—24), die am 23. November 1729 der Petersburger gelegt wurde, zeichnet sich in gleicher Weise aus durch die Bedeutung ihres wie durch den Scharfblick, Erfindungsgeist und Kenntnisreichtum des damaligen Verfassers. Es handelt sich darum, eine Funktion der reellen Veränderlichen x die für positiv ganzzahliges $x = 1, 2, 3, 4, \dots$ die Werte des allgemeinen WALLISschen „*series hypergeometrica*“

$$(1) \quad 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \text{etc.}$$

annimmt, d. h. die dem zunächst nur für positive ganzzahlige x definiert ist, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$ auch für andere x einen Sinn gibt.¹⁾ Diese Funktion hat Euler

1) Die Fragestellung von E 19 hat mit der „Reihe“ (1) nichts zu tun; wir setzen in (1) statt der $+$ Zeichen Kommata und von der „Folge“

$$(1') \quad 1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3, \dots$$

sprechen; auch in E 189 (I₁₄, p. 465) ist beispielsweise von der Reihe $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ die Rede, wo nach heutigem Sprachgebrauch die Folge $1, 2, 3, 4, \dots$ gemeint ist. An Stellen freilich bedeutet bei Euler *series hypergeometrica* wirklich die Reihe (1) oder die Reihe mit alternierenden Gliedern $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \dots$ (E 247, I₁₄, p. 594), während wieder an anderen Stellen die Folge (1') (ohne $+$ Zeichen) als „*series hypergeometrica*“ bezeichnet wird (z. B. E 594, I₁₇, p. 217). Benennung *progressio* statt *series* E 47, I₁₄, p. 114).

Euler war sich selbstverständlich klar darüber, daß es sich bei den drei Arten von unendlichen Reihen, Produkten und Kettenbrüchen im Grunde nur um verschiedene Darstellungen der unendlichen Folge handelt, wenn man auch den gelegentlichen Gebrauch des Wortes *Reihe* in diesem Sinne (wie oben) noch nicht als eine allgemeine Begriffsbestimmung an-

späteren Arbeit (E 421, *Opera omnia* I₁₇, p. 341) mit $[x]$ bezeichnet¹⁾, und an die Zeichen wollen wir uns, wie es auch in der Übersicht über die Bände 17, 18, 19 der ersten Serie geschehen ist (*Opera omnia* I₁₀, p. LX- -LXV), im folgenden halten.

EULERS Ergebnis ist

$$(2) \quad [x] = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{1-x}(\nu+1)^x}{\nu+x};$$

es macht keine Mühe zu zeigen, daß das Reziproke dieser Funktion $[x]$ identisch ist mit der WEIERSTRASSschen ganzen Funktion

$$Pc(x+1) = e^{\gamma x} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}},$$

wo

$$(3) \quad \gamma = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} - \log r\right)$$

die sog. „EULERSche Konstante“ ist.²⁾

In der Abhandlung 19 gibt EULER auch die (für $x \geq 0$ gültige Integraldarstellung)

$$(4) \quad [x] = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^x dt,$$

transformiert häufig eine in der Form eines jener drei Algorithmen gegebene konvergente Folge f_1, f_2, f_3, \dots in eine der beiden anderen Formen, z. B. einen Kettenbruch in eine Reihe. Vgl. z. B. S. C dieses Berichts.

1) In der Abhandlung 19 kommt für diese Funktion überhaupt kein Zeichen vor, es wird nur vom „terminus, cuius index est x “ gesprochen. Sonst schreibt EULER auch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots$ statt $[x]$ (z. B. in der Überschrift von E 368; *Opera omnia* III) oder $2! : x$ (in E 352 und E 36) oder $\varphi : x$ (in E 768); für eine etwas allgemeinere Funktion schrieb er in E 613 $II : x$. Ähnlich ist das GAUSSsche Zeichen $II(x)$ für $[x]$ (*Disquisitiones generales circa seriem infinitam* 1 + $\frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \cdots$, *Werke*, Bd. 3, p. 145), während LEGENDRE die Bezeichnung $\Gamma(x+1)$ einführt (*Exercices de calcul integral*, t. 2, 1814, p. 4) und WEIERSTRASS $Pc(x)$ für den reziproken Wert von $\Gamma(x)$ schreibt (*Werke*, Bd. 1, S. 161). $[x]$ ist übrigens ursprünglich bei EULER ein allgemeines Funktionszeichen, das bald für diese, bald für eine andere Funktion gebraucht wird, z. B. bedeutet in E 465 (I₁₆, p. 207) $[n]$ soviel wie $(1+x)^n$, wieder eine andere Bedeutung hat $[n]$ in E 453 (I₁₅, p. 183). Für eine Verallgemeinerung von $[x]$ benutzt auch Euler das Zeichen Γ . S. S. LXIV.

2) Nach N. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig 1906, S. 12 kommt dieses Produkt zuerst bei O. SCHÜMILCH, *Archiv der Math. und Physik*, Bd. 4, 1844, S. 171 und bei F. NEWMAN, *Cambridge und Dublin math. Journal*, Bd. 3, 1848, S. 57 vor. Wegen der Konstanten γ siehe die Anmerkung 1 S. XI.

die durch die Substitution $t = e^{-z}$ in die heute gebräuchlichere, ebenfalls auf EULER gehende (siehe z. B. E 368, *Opera omnia* I₁₈)

$$(5) \quad [x] = \int_0^{\infty} z^x e^{-z} dz$$

übergeht.

Er gewinnt ferner aus dem WALLISSchen Produkte für π den Funktionswert

$$(6) \quad \left[\frac{1}{2} \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und die sich daraus mittels der Funktionalgleichung

$$(7) \quad [x+1] = (x+1)[x]$$

ergebenden. Für rationales $\frac{p}{q}$ drückt er den Funktionswert $\left[\frac{p}{q} \right]$ durch ein Produkt von Betafunktionen aus; vgl. hierzu die dem Bande I₁₈ vorangestellte Übersicht über 17, 18, 19, insbesondere S. LXI.

Am Schlusse der Abhandlung 19 gibt EULER eine Ausdehnung der Definitionen der Differentialquotienten einer Potenz für nicht notwendig ganzzahliges n :

$$(8) \quad \frac{d^n z^\alpha}{dz^n} = \frac{[\alpha]}{[\alpha-n]} z^{\alpha-n}.$$

Durch was für Überlegungen EULER zu seinem Produkte der Funktion $[x]$ gelangt ist, ist aus der Abhandlung 19 nicht ersichtlich.

Erst in der 1793, also mehr als 60 Jahre später, gedruckten Abhandlung 19. August 1776

De termino generali serierum hypergeometricarum

(*Opera omnia* I₁₆, p. 139–162) finden wir den EULERSchen Gedankengang sehr einandergesetzt: Vermöge der Funktionalgleichung der Funktion $[x]$ ist einerseits ein ganzzahliges positives ν :

$$(9) \quad [x+\nu] = (x+1)(x+2)\dots(x+\nu)[x],$$

und falls auch x ganzzahlig ist,

$$[x+\nu] = (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+x)[\nu],$$

also

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x+\nu]}{[x]} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+x)} = 1$$

und auch mit beliebigem festem α

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x+\nu]}{[x](\nu+x)^x} = 1.$$

Verlangt man nun von der Funktion $[x]$, die aufzustellen versucht wird, daß sie außer der Funktionalgleichung und der Nebenbedingung $[1] = 1$ für beliebiges (nicht negativ ganzzahliges) x der Gleichung (10) oder (11) genüge, so folgt aus (9) und (11) durch Division

$$(12) \quad [x] = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(r + \alpha)^x 1 \cdot 2 \cdots r}{(x + 1)(x + 2) \cdots (x + r)}.$$

Nennt man den hier rechts stehenden Bruch $f(r)$, so kann man auch, indem man noch $\alpha = 1$ setzt, schreiben (man sieht nämlich leicht, daß die rechte Seite von α unabhängig ist; Beweis *Opera omnia* I, S. 148):

$$(13) \quad [x] = f(1) \frac{f(2)}{f(1)} \frac{f(3)}{f(2)} \frac{f(4)}{f(3)} \cdots$$

$$= \frac{2^x}{x+1} \cdot \frac{2^{1-x} \cdot 3^x}{x+2} \cdot \frac{3^{1-x} \cdot 4^x}{x+3} \cdot \frac{4^{1-x} \cdot 5^x}{x+4} \cdots$$

Hinterher erkennt man unschwer, daß dieses mit (12) übereinstimmende unendliche Produkt für alle nicht ganzzahlig negativen x konvergiert und daß es eine Funktion darstellt, und zwar die einzige, die allen verlangten Bedingungen genügt. Was an der vorstehenden Darstellung neuzeitlicher ist als bei EULER, betrifft mehr das äußere Gewand als das Wesen.

1) Euler hat damit den grundlegenden Satz aus der Theorie der Gammafunktion vorweggenommen, den K. WEIERSTRASS 1856 im 51. Bande des *Journals für die reine und angewandte Mathematik* ohne Kenntnis von EULERS Vorgängerschaft veröffentlicht hat (siehe *Math. Werke von KARL WEIERSTRASS*, Bd. 1, Berlin 1894, S. 193). An einer späteren Stelle (*Werke*, Bd. 2, S. 91) nennt WEIERSTRASS GAUSS als den Entdecker der EULERSCHEN Produktentwicklung (12) (siehe CARL FRIEDRICH GAUSS, *Werke*, Bd. 3, S. 143, wo EULER ebenfalls nicht genannt wird). WEIERSTRASS hat dort das Produkt (12) ausdrücklich als Vorbild für seine allgemeine Produktdarstellung ganzer transzendenter Funktionen bezeichnet.

Tatsächlich hat EULER nicht nur die Produktdarstellung (12), sondern sogar den Gedanken der Konvergenz erzeugenden Faktoren WEIERSTRASS vorweggenommen. Denn es bedeutet keinen Unterschied, ob man den Gliedern des divergenten Produktes $\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{x}{v}\right)$ die Konvergenz erzeugenden Faktoren $e^{-\frac{x}{v}}$ oder den Gliedern der divergenten unendlichen Reihe $\sum_1^{\infty} \log \left(1 + \frac{x}{v}\right)$

die Konvergenz erzeugenden Summanden $-\frac{x}{v}$ oder auch $-x \log \left(1 + \frac{1}{v}\right)$ beifügt. Das tat aber EULER mit voller Absicht in der Abhandlung 613; vgl. S. XLVII dieses Berichts.

Der große Unterschied gegenüber WEIERSTRASS bleibt natürlich der, daß EULER nicht eine allgemeine ganze Funktion aus ihren Nullstellen konstruieren wollte, sondern die besondere Funktion $\Gamma(x+1)$ (also das Reziproke einer ganzen Funktion) aus ihrer Funktionalgleichung.

In der Abhandlung 652 bildet und untersucht EULER noch die Funktion

$$\varphi(x) = a^x \cdot \frac{a^{1-x}(a+b)^x}{a+x b} \cdot \frac{(a+b)^{1-x}(a+2b)^x}{a+(x+1)b} \cdot \frac{(a+2b)^{1-x}(a+3b)^x}{a+(x+2)b} \dots$$

die eine Verallgemeinerung von $[x]$ ist; sie genügt der Funktionalgleichung

$$\varphi(x+1) = (a+xb)\varphi(x)$$

und nimmt für $x = n$ (positiv ganzzahlig) den Wert

$$a(a+b)(a+2b)\dots(a+(n-1)b)$$

an. Beispielsweise findet EULER

$$\left(\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = a \cdot \int_0^1 \frac{x^{2a+b-1} dx}{\sqrt{1-x^{2b}}} : \int_0^1 \frac{x^{2a-1} dx}{\sqrt{1-x^{2b}}},$$

wobei freilich den Konstanten a, b noch gewisse Bedingungen aufzuerlegen wü

In der gleichzeitig mit 652 vorgelegten Abhandlung 661

Variae considerationes circa series hypergeometricas

(*Opera omnia* I₁₈, p. 178–192) wird noch gezeigt, daß die soeben betrachtete φ für große positive x asymptotisch gleich

$$A e^{-x} (a - b + bx)^{\frac{a}{b} + x - \frac{1}{2}}$$

ist, wo A eine von a und b , aber nicht von x abhängige Zahl ist. Es würde sich lohnen, die EULERSchen Bemühungen um die Ermittlung dieser Zahl A zu nehmen. Zwei weitere von EULER betrachtete und von ihm $\mathcal{A}:i$ und $\mathcal{O}:i$ genannten lassen sich auf $\varphi(x)$ (von EULER $\Gamma:i$ genannt) zurückführen.

Nachdem EULER in der Abhandlung 19 mit großem Erfolg aus dem nur ganzzahlige n definierten Ausdruck $n!$ mittels Interpolation die Funktion $[x]$ gewandte er sich bald anderen bestimmten Interpolationsaufgaben wie auch allgemein der Interpolationslehre zu.

In der auf 19 folgenden Abhandlung 20, die erst $1\frac{1}{2}$ Jahre später als 19 1731 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde und die den Titel hat

De summatione innumerabilium progressionum

(*Opera omnia* I₁₄, p. 25–41), wird die für $x = 1, 2, 3, \dots$ definierte Funktion

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x}$$

durch den Ausdruck $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$ auf alle positiven x ausgedehnt. Darüber wurde s. v. vorigen Abschnitt S. XVIII berichtet, weil in der Abhandlung 20 zum ersten Mal die Frage nach dem Werte der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ aufgeworfen wurde. Noch in einer weiteren Abhandlung ist die Abhandlung 20 merkwürdig: In ihrem 10. Paragraphen (*Opera omnia* I, p. 87) wird zum ersten Male (in noch nicht voll befriedigender Weise) die EULERSche Konstante γ definiert.

In der Abhandlung 43 vom 11. März 1734

De progressionibus harmonicis observationes

(*Opera omnia* I, p. 87--100) werden dann 6 Dezimalstellen von γ berechnet (s. v. 1734, p. 11 richtig sind) auf Grund der Formel

$$(14) \quad \gamma = \frac{1}{2} s_2 - \frac{1}{3} s_3 + \frac{1}{4} s_4 - \frac{1}{5} s_5 + \dots$$

Eine viel genauere Berechnung erfolgte dann in der Abhandlung 47, über die s. v. 1734, p. 11 im ersten Abschnitt berichtet wurde. Vom übrigen Inhalt der Abhandlung 43 sind vielleicht noch erwähnenswert Reihen von der Art der beiden folgenden:

$$(15) \quad \log n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+vn} + \frac{1}{2+vn} + \dots + \frac{1}{n-1+vn} - \frac{n-1}{n+vn} \right),$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots;$$

deren erste folgt aus der Gleichung

$$\log n = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{vn} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{v} \right),$$

die zweite ergibt sich für $x=1$ aus der Potenzreihe

$$\log \frac{1+x}{1+x^2} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Die Reihe für $\log \frac{1-x^n}{1-x}$ liefert im Falle $x=1$ einen zweiten Beweis für (15).

(*Opera omnia* I₆, p. 569—603) ist ausschließlich der EULERSchen Konstanten γ gewidmet, deren Berechnung auf verschiedene Weisen gezeigt wird, teils mit Hilfe der EULERSchen Summenformel, teils mit Benutzung des Zusammenhangs zwischen γ und den Harmonischen Summen s_n . Am Schlusse der Arbeit werden 8 Formeln zusammengestellt, die alle verschiedenen Weisen γ durch die Werte s_n ausdrücken, darunter die Formel (14) von (14). Als Beispiele mögen noch folgende Formeln angeführt werden:

$$1 - \gamma = \frac{1}{2}(s_2 - 1) + \frac{1}{3}(s_3 - 1) + \frac{1}{4}(s_4 - 1) + \dots$$

$$1 - \log \frac{3}{2} - \gamma = \frac{1}{3 \cdot 2^2}(s_3 - 1) + \frac{1}{5 \cdot 2^4}(s_5 - 1) + \frac{1}{7 \cdot 2^6}(s_7 - 1) + \dots$$

Aus der Formel

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\int_0^x \frac{(1-z^n)}{1-z} dz - \ln \frac{1-z^n}{1-z} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\int_0^x \frac{(1-z^n)}{1-z} dz + n \int_0^x \frac{z^{n-1}}{1-z^n} dz - \int_0^x \frac{dz}{1-z} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{n z^{n-1}}{1-z^n} - \frac{z^n}{1-z} \right) dz \end{aligned}$$

gewinnt EULER durch die Substitution $z^n = t$ und den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ die Integraldarstellung

$$\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln t} \right) dt.$$

Die erstmals in der Abhandlung 20 gestellte Interpolationsaufgabe: eine Funktion zu bilden, welche für alle positiven ganzzahligen $x = n$ die vorgeschriebenen Werte

$$(16) \quad \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \dots + \varphi(n)$$

annimmt, wird wieder aufgegriffen in der Abhandlung 613 vom 13. März 1780¹⁾

1) Der Inhalt dieser Abhandlung findet sich zum Teil schon vorher im 17. Kapitel *posterioris* der *Institutiones calculi differentialis* (*Opera omnia* I₆, p. 619—647), das über eine (natürlich nicht vollständige) Zusammenfassung der EULERSchen Untersuchungen über Interpolation enthält, von denen im obigen zweiten Abschnitt unserer Übersicht die Rede ist.

Der Ansatz

$$(17) \quad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu) - \varphi(x + \nu)$$

löst die gestellte Aufgabe für $x > 0$, wenn $\varphi(x)$ für $x \rightarrow \infty$ monoton gegen Null geht. Die von EULER angegebene Bedingung $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$ ohne den Zusatz der Monotonie genügt zwar, um die Konvergenz der Reihe (17) für ganzzahliges $x = n > 0$ nach dem Grenzwert (16) sicherzustellen, aber nicht für die Konvergenz der Reihe im Falle eines beliebigen x ; doch ist andererseits die Monotonie der Konvergenz von $\varphi(x)$ gegen Null hinreichend, nicht notwendig.

Im Falle $\varphi(\nu) = \frac{1}{\nu}$ ergibt sich so

$$(18) \quad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x}{\nu(x + \nu)};$$

in der Abhandlung 20 hatte EULER im nämlichen Falle die Lösung $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$ gefunden, die mit (18) identisch ist, worauf übrigens EULER nicht hinweist; doch berechnet er dort für $x = \frac{1}{2}$ den Funktionswert und findet natürlich wieder den auf anderem Wege in 20 erhaltenen Wert $2 - 2 \log 2$.

EULER betrachtet dann Fälle, in welchen der Ansatz (17) nicht konvergiert, z. B. $\varphi(\nu) = \sqrt{\nu}$, $\varphi(\nu) = \log \nu$ usw. In solchen Fällen hilft er sich auf eine sehr merkwürdige Weise, indem er den einzelnen Reihengliedern in (17) noch Konvergenz erzeugende Summanden und zum Ausgleich der ganzen Reihe ein Anfangsglied beifügt. Sein Gedankengang ist etwa folgender: er entwickelt $\varphi(x + \nu)$ formal nach den Regeln der Differenzenrechnung in die Reihe

$$(19) \quad \varphi(x + \nu) = \varphi(\nu) + x(\varphi(\nu + 1) - \varphi(\nu)) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} (\varphi(\nu + 2) - 2\varphi(\nu + 1) + \varphi(\nu)) + \dots$$

woraus sich ergibt

$$(20) \quad 0 = [\varphi(\nu) - \varphi(x + \nu)] + x(\varphi(\nu + 1) - \varphi(\nu)) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} (\varphi(\nu + 2) - 2\varphi(\nu + 1) + \varphi(\nu)) + \dots$$

Von der hier rechtsstehenden Reihe war der erste Summand das allgemeine Glied der Reihe (17).

Statt dessen nimmt nun EULER bei seinem zweiten Ansatz für $f(x)$ die Glieder von (20) und muß dann zum Ausgleich bei $f(x)$ offenbar das An hinzu fügen. Auf diese Weise kommt er zu dem Ansatz

$$(21) \quad f(x) = x\varphi(1) + \sum_1^{\infty} [\varphi(\nu) - \varphi(x + \nu) + x(\varphi(\nu + 1) - \varphi(\nu))]$$

Wenn

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\varphi(\nu + 1) - \varphi(\nu)) = 0$$

ist, konvergiert diese Reihe für jedes gauzzahlige $x = n > 0$ nach dem W $+ \dots + \varphi(n)$.

Um aber die Konvergenz der Reihe (21) für jedes positive x zu noch eine Zusatzbedingung machen, als welche beispielsweise die Monoton einem gewissen x ab hinreichend, aber nicht notwendig ist.

Der dritte Ansatz EULERS

$$(22) \quad f(x) = x\varphi(1) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} (\varphi(2) - \varphi(1)) + \sum_1^{\infty} \left[\varphi(\nu) - \varphi(x + \nu) + x(\varphi(\nu + 1) - \varphi(\nu)) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} (\varphi(\nu + 2) - \varphi(\nu + 1)) \right]$$

nimmt von (20) her noch ein weiteres Glied, der vierte noch eines mehr irgendein Ansatz, so auch alle späteren, und zwar nach der nämlichen läßt sich z. B. im Falle $\varphi(\nu) = \frac{1}{\nu}$ der sich aus dem ersten Ansatz ergebe

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 9} + \dots$$

mittels des dritten Ansatzes durch die besser konvergente Reihe

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9} + \dots \right)$$

darstellen, damit ist also zugleich für gewisse Reihen ein Verfahren der serung gewonnen. Die von EULER gefundenen Funktionen $f(x)$ genüge gleichung

$$f(x + 1) = f(x) + \varphi(x + 1);$$

es genügt daher, die Funktionswerte $f(x)$ aus den hergeleiteten Reihen

$0 < x < 1$ zu berechnen, worauf für die übrigen x die Funktionalgleichung benutzt werden kann.

Der dritte Ansatz führt (wie EULER zu beweisen versucht¹⁾) zum Ziele im Falle $\varphi(v) = v^\alpha$, wenn $\alpha < 2$ ist, der zweite im Falle $\varphi(v) = v^\alpha$, wenn $\alpha < 1$ ist, außerdem im Falle $\varphi(v) = \log v$.

Im letzteren Falle z. B. liefert er

$$(23) \quad f(x) = \sum_1^\infty \log \frac{(\nu + 1)^x \nu^{1-x}}{x + \nu}.$$

Wobei $f(x)$ ist der Logarithmus der EULERSchen Funktion $[x]$, für deren Produktdarstellung

$$(24) \quad [x] = \prod_1^\infty \frac{(\nu + 1)^x \nu^{1-x}}{x + \nu}$$

sich somit in diesem Zusammenhang eine besonders einfache und schöne Herleitung ergibt.

In der Abhandlung 613 werden noch einige allgemeinere Produkte betrachtet; auffallend findet sich in ihr ein Bild der Kurve $y = f(x)$ im Falle $\varphi(v) = \frac{1}{v}$, ebenso wie eine Zahlenrechnung für $\int_0^1 f(x) dx$.

In den besprochenen Arbeiten über die Interpolationsaufgabe, die verlangt, eine Funktion $f(x)$ zu bilden, deren Werte für $x = 1, 2, 3, \dots$ vorgeschrieben sind, scheint sich EULER nicht ganz klar geworden zu sein, daß diese Aufgabe, wenn man keine Nebenbedingung macht, unendlich viele Lösungen hat, und er empfand es als etwas sehr Merkwürdiges, daß er sozusagen zufällig („quasi casu“) zur Untersuchung einer Reihe $s(x)$ geführt wurde, die für $x = a^n$ und für $n = 1, 2, 3, \dots$ die Werte $s(a^n) = n$ annahm genau wie die Funktion $\log x$ (a ist bei EULER > 1 zu denken), ohne daß $s(x) = {}^a\log x$ wäre. Die Reihe $s(x)$ ist folgende:

$$s(x) = \frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^9} + \dots$$

$$+ \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^9-a^{27}} + \dots$$

1) Diese Konvergenzuntersuchungen EULERS sind recht bemerkenswert; man würde sie heute natürlich in anderer Form bringen.

2) Tatsächlich betrachtet EULER in 613 ein allgemeineres Produkt, von dem er aber (2) als besonderen Fall schon in den *Institutiones calculi differentialis partis posterioris caput XV* hervorgehoben hatte (*Opera omnia* Iio, p. 635--640).

Die Abhandlung 190 vom 26. Januar 1750

Consideratio quarundam serierum, quae singularibus proprietatibus sunt praeditae

(*Opera omnia* I₁₄, p. 516—541) ist der Untersuchung dieser Funktion $s(x)$ gewidmet:

$s(0)$ ergibt die sogen. LAMBERT'sche Reihe

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-a^3} + \frac{1}{1-a^4} + \dots;$$

EULER versäumt nicht, sie nach Potenzen von a zu entwickeln und auf die zahlentheoretische Bedeutung der Koeffizienten dieser Potenzreihe hinzuweisen. Ferner wird die Funktionalgleichung

$$s(x) - s(ax) + 1 = (1 - ax) \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x}{a^3}\right) \dots$$

abgeleitet; das rechtsstehende unendliche Produkt kommt (für $x = \frac{1}{a^2}$) später in der Theorie der Thetafunktionen vor. Auch die weitere Funktionalgleichung

$$s(a^2x) = 2s(ax) - s(x) + ax(1 + s(x) - s(ax))$$

wird abgeleitet, wie auch die Entwicklung von $s(x)$ nach Potenzen von x .

Allgemeiner wird die erwähnte Interpolationsaufgabe, $f(x)$ aus den gegebenen Werten $f(1), f(2), f(3), \dots$ zu bestimmen, wieder aufgenommen in der Abhandlung 189

De serierum determinatione seu nova methodus invenicndi terminos generales serierum

(*Opera omnia* I₁₄, p. 463—515), die drei Viertel Jahre später als 190, nämlich am 21. September 1750, der Petersburger Akademie vorgelegt wurde. EULER sagt, es sei sonderbar und gegen die allgemeine Erwartung, daß es unendlich viele Funktionen $f(x)$ gebe, die in den unendlich vielen Funktionswerten $f(1), f(2), f(3), \dots$ übereinstimmen; z. B. habe die Aufgabe: die Funktion $f(x)$ zu finden, für die $f(n) = n$ sei ($n = 1, 2, 3, \dots$), folgende allgemeine (nicht allgemeinste) Lösung:

$$(25) \quad f(x) = x + \sum_1^{\infty} b_\nu \sin \nu \pi x;$$

EULER meint, obwohl er von geometrischen Vorstellungen ausgeht und erkennt, daß es sich um die Bestimmung einer durch gegebene Punkte gehenden, im übrigen willkürlichen Kurve handelt, die Funktion $f(x) - x$ müsse periodisch sein, und sagt (in § 9) ausdrücklich, daß für jede Funktion $f(x)$, für die $f(n) = 1$ gilt,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \dots$$

müsse. Er kommt zu diesem Schlusse, weil er in dem zuletzt erwähnten Beispiele die
 chst nur für ganzzahliges x geltende Gleichung

$$f(x+1) = f(x)$$

jedes x in Anspruch nimmt, ebenso wie er in dem zuerst genannten Beispiele, wo die
 ktionswerte $f(n) = n$ gegeben waren, allgemein die Funktionalgleichung

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

etzt. Um diese zu lösen, verfährt er so: er entwickelt die linke Seite von (26) nach dem
 LORSCHEN Lehrsatz

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(x)}{2!} + \dots$$

schließt durch Einsetzen in (26), daß die gesuchte Funktion $y = f(x)$ der linearen
 entialgleichung unendlich hoher Ordnung

$$y' + \frac{y''}{2!} + \frac{y'''}{3!} + \dots = 1$$

gen müsse. Diese integriert er nach dem für eine endliche Ordnung bewiesenen¹⁾ Ver-
 on, indem er zu dem partikulären Integrale $y = x$ das allgemeine Integral der Differential-
 lung

$$y' + \frac{y''}{2!} + \frac{y'''}{3!} + \dots = 0$$

ort, das die Form hat

$$y = \sum_1^{\infty} c_{\nu} e^{\lambda_{\nu} x},$$

die c_{ν} willkürliche Konstanten und die λ_{ν} die Nullstellen der Funktion

$$z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = e^z - 1,$$

die Vielfachen von $2\pi i$ sind. Indem er schließlich in (28) die Exponentialfunktionen
 n trigonometrische ersetzt, findet er als Lösung der Differentialgleichung (27a):

$$\sum_1^{\infty} b_{\nu} \sin 2\nu\pi x + \sum_0^{\infty} a_{\nu} \cos 2\nu\pi x$$

1) Zuerst in E 62 (*Opera omnia* I₂₂), dann auch in *Institutiones calculi integralis, volu-*
scundum, sectio secunda, cap. II (*Opera omnia* I₂₂, p. 296—317).

und somit als Lösung der gestellten Interpolationsaufgabe

$$(30) \quad f(x) = x + \sum_1^{\infty} b_v \sin 2v\pi x + \sum_0^{\infty} a_r \cos 2v\pi x,$$

wo wegen der Bedingung $f(n) = n$ die Koeffizienten a_r noch der Bedingung $\sum_0^{\infty} a_r = 0$ genügen haben. In dem Ausdruck (29) kann man trotz der Fragwürdigkeit seiner Herleitung einen ersten Ansatz für die Darstellung einer willkürlichen Funktion durch eine trigonometrische Reihe erblicken. Freilich glaubt EULER den Ansatz (29) noch durch einen anderen ersetzen zu sollen: Er sagt, daß alle in (29) vorkommenden Funktionen $\sin 2v\pi x$, $\cos 2v\pi x$ gerade Funktionen von

$$p = \sin \pi x \quad \text{und} \quad q = \cos \pi x$$

seien, und ersetzt daher (29) durch eine willkürliche gerade Funktion von p und q . Daß von ihm zu Eingang seiner Abhandlung gegebene Beispiel (25) nicht ein Sonderfall seiner allgemeinen Lösung (30) ist, scheint ihm nicht aufgefallen zu sein.

Neben den beiden erwähnten Beispielen $f(n) = 1$ und $f(n) = n$ werden noch mehrere andere (z. B. $f(n) = n^n$) in ähnlicher Weise behandelt: Die Interpolationsaufgabe wird durch die Aufgabe, eine Funktionalgleichung zu lösen, ersetzt, und diese wird auf die Integration einer Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung zurückgeführt.

Das gelegentliche Vorkommen von $e^x - 1$ als Hilfsfunktion nimmt EULER zum Anlaß, um erneut ausführlich auf die Produkt- und Partialbruchentwicklungen der elementaren Funktionen, auf die BERNOULLI'schen Zahlen und die Reihen $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{2n}}$ wie auch auf die Summenformel zu sprechen zu kommen.

Auch die Abhandlung 555 vom 18. Mai 1773

De eximio usu methodi interpolationum in scrierum doctrina

(*Opera omnia* I, p. 435—497) beginnt mit einem Hinweis auf die Vieldeutigkeit des Interpolationsproblems und darauf, daß die dann folgenden Ausführungen nur eine bestimmte Lösung aus unendlich vielen geben. Es wird dann eine ungerade Funktion $f(x)$ angenommen, von der die Funktionswerte $p = f(a)$, $q = f(b)$, $r = f(c)$, $s = f(d)$ usw. bekannt sind. Dann wird die gerade Funktion $\frac{f(x)}{x}$ in eine Reihe

$$(31) \quad \frac{f(x)}{x} = A + B(x^2 - a^2) + C(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) + D(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) + \dots$$

entwickelt, für deren Koeffizienten

$$A \left(= \frac{p}{a} \right), \quad B, \quad C, \quad D \dots$$

das Bildungsgesetz angegeben wird. Es handelt sich also im wesentlichen um die bei der Interpolationsformel NEWTONS, der aber nicht genannt wird. Die Gleichung (31) wird auch auf die sogen. LAGRANGESche Form gebracht

$$(32) \quad \begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{p}{a} \cdot \frac{b^2 - x^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{c^2 - x^2}{c^2 - a^2} \cdot \frac{d^2 - x^2}{d^2 - a^2} \cdot \text{etc.} \\ &+ \frac{q}{b} \cdot \frac{a^2 - x^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{c^2 - x^2}{c^2 - b^2} \cdot \frac{d^2 - x^2}{d^2 - b^2} \cdot \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Im ersten Beispiel wählt EULER $f(x) = \sin x$ und nimmt die vier Interpolationsstellen

$$a = \varphi, \quad b = 2\varphi, \quad c = 3\varphi, \quad d = 4\varphi.$$

Schließlich erhält er aus (32) durch den Grenzübergang $x \rightarrow 0$ die Näherungsformel

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sin \varphi}{1} \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \\ &- \frac{\sin 2\varphi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2 \cdot 6} \\ &+ \frac{\sin 3\varphi}{3} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 7} \\ &- \frac{\sin 4\varphi}{4} \cdot \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 6} \cdot \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 7} \cdot \end{aligned}$$

Indem er statt vier unendlich viele Interpolationsstellen $\varphi, 2\varphi, 3\varphi, \dots$ annimmt, gewinnt er durch Grenzübergang die für $-\pi < \varphi < \pi$ gültige FOURIERSche Reihe

$$(33) \quad \frac{\varphi}{2} = \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi + \dots;$$

deren Herleitung aus der LAGRANGESchen Interpolationsformel ist sehr merkwürdig auftauchenden Zweifel, ob die Gleichung (33) auch für $\varphi = \pi$ richtig sei, beschwört EULER durch die Bemerkung, man habe dann eben für φ in (33) $\pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) einzusetzen und darauf zur Grenze $\varepsilon \rightarrow 0$ überzugehen. Gegen diese auf einer unbegründeten Vertauschung zweier Grenzübergänge beruhende unzulässige Definition einer Reihensumme, deren Gültigkeit für Funktionen einer Veränderlichen φ sind, mußte noch im 20. Jahrhundert ange-

werden.¹⁾ EULER behauptet übrigens sogar, daß die Reihe noch für $\varphi = 2\pi$ (E 555, § 16; *Opera omnia* IIs, p. 450.)

Die Wahl der Interpolationsstellen

$$\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{3}{2}\varphi, \quad \frac{5}{2}\varphi, \quad \dots$$

führt EULER zu der Reihe

$$(34) \quad \sin \omega - \frac{1}{9} \sin 3\omega + \frac{1}{25} \sin 5\omega - \frac{1}{49} \sin 7\omega + \dots,$$

von der er meint, sie konvergiere ohne Einschränkung gegen $\frac{\pi\omega}{4}$, was $|\omega| \leq \frac{\pi}{2}$ richtig ist. Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ folgt aus (34) ein neuer Beweis (der für S. XXXVII) für die Gleichung

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots,$$

die mit $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$ gleichbedeutend ist. Ferner liefert die Integration von
Beweis der Gleichung

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}.$$

Durch immer wieder andere Wahl der Interpolationsstellen gelangt großen Zahl sehr merkwürdiger Reihen; zur Untersuchung der auftretenden er Befunktionen heran. Es ist in diesem kurzen Berichte unmöglich, alle d Ergebnisse oder gar die von EULER zu deren Gewinnung eingeschlagenen Richtigkeit zu prüfen. Als Beispiele mögen die in §§ 26 und 27 (*Opera om* stehenden Reihen betrachtet werden. Die erste Gleichung des § 26, wo die nur auf der rechten Seite vorkommt,

$$(35) \quad \begin{aligned} \pi \cot \pi x &= \frac{\cos x \varphi}{x} - \frac{\cos(1-x)\varphi}{1-x} + \frac{\cos(1+x)\varphi}{1+x} - \frac{\cos(2-x)\varphi}{2-x} + \dots \\ &= \cos x \varphi \left(\frac{1}{x} - \frac{2x \cos \varphi}{1-x^2} - \frac{2x \cos 2\varphi}{4-x^2} - \frac{2x \cos 3\varphi}{9-x^2} - \dots \right) \\ &\quad - \sin x \varphi \left(\frac{2 \sin \varphi}{1-x^2} + \frac{2 \cdot 2 \sin 2\varphi}{4-x^2} + \frac{2 \cdot 3 \sin 3\varphi}{9-x^2} + \frac{2 \cdot 4 \sin 4\varphi}{16-x^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

1) Vgl. A. PRINGSHEIM, *Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung* S. 591 und *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* Bd. II₁, Leipzig 18 Anmerkung 170.

ist für alle (nicht ganzzahligen) x und für $|\varphi| \leq \pi$ richtig; die mit $\cos x\varphi$ multiplizierte Klammer ist nämlich gleich $\frac{\pi \cos x(\varphi + \pi)}{\sin x\pi}$ für $-\pi \leq \varphi \leq 0$ und $= \frac{\pi \cos x(-\varphi + \pi)}{\sin x\pi}$ für $0 \leq \varphi \leq \pi$, während die mit $-\sin x\varphi$ multiplizierte Reihe gleich $\frac{\pi \sin x(\varphi + \pi)}{\sin x\pi}$ für $-\pi \leq \varphi < 0$ und $= \frac{\pi \sin x(-\varphi + \pi)}{\sin x\pi}$ für $0 < \varphi \leq \pi$ ist. Indem er (35) zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ integriert, gewinnt EULER die Partialbruchreihe

$$\frac{\pi^2 \cos x\pi}{\sin^2 x\pi} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} - \dots,$$

während die Integration zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{x}$ die Reihe

$$\frac{\pi^2}{x} \cot x\pi = \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{(x-1)^2} - \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{(x+1)^2} + \frac{\sin \frac{2\pi}{x}}{(x-2)^2} - \frac{\sin \frac{2\pi}{x}}{(x+2)^2} + \dots$$

liefert.

Es dürfte sich wohl lohnen zu untersuchen, inwieweit andere von EULER in der Abhandlung 555 mitgeteilte Reihen und inwieweit seine Herleitungen richtig sind. EULER selbst sagt, daß er seinen Ergebnissen nicht ganz traue (§ 33; *Opera omnia* I, 6, S. 40). Er begründet dieses Mißtrauen nicht mit dem Fehlen jeder Konvergenzuntersuchung, sondern nur mit der erwähnten Vieldeutigkeit der Interpolationsaufgabe. Bei dieser Gelegenheit stellt er auch die Frage auf: Wie gewinnt man die allgemeinste Funktion $F(x)$, welche für

$$x = a, b, c, d, \dots \text{ die Werte } p, q, r, s, \dots$$

annimmt, wenn man eine solche Funktion $f(x)$ kennt? EULERS Antwort lautet: Man wähle eine Funktion $\Omega(x)$ mit den Nullstellen a, b, c, d, \dots . Ist dann $w(x)$ eine für $x = 0$ verschwindende, im übrigen willkürliche Funktion, so ist

$$F(x) = f(x) + w(\Omega(x)).$$

Die richtige Antwort lautet natürlich

$$F(x) = f(x) + \Omega(x)w_1(x),$$

wo $w_1(x)$ irgendeine willkürliche Funktion ist. Es ist noch zu erwähnen, daß EULER in dieser unter manchem Gesichtspunkt bedeutenden Arbeit auch ausführlich auf den Zusammenhang zwischen den in seinen Entwicklungen (vgl. (32)) auftretenden Produkten und seinen Betafunktionen eingeht.

Zum Schlusse dieses Abschnitts darf noch eine Abhandlung erwähnt werden, die wiewohl ihres geometrischen Gewandes in den *Geometrieband* III der *Opera omnia* aufgenommen

wurde, die aber inhaltlich eine Einzelschrift über die Gammafunktion ist;
 19. Dezember 1765 der Petersburger Akademie vorgelegte Abhandlung 368

De curva hypergeometrica hac aequatione $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x$ expre

EULER sagt hier, daß die in der Überschrift genannte Funktion desha-
 stimmt sei, weil sie nicht nur die Werte $\Pi(n) = n!$ für positives ganzzahlig
 sondern außerdem der Funktionalgleichung $\Pi(x+1) = (x+1)\Pi(x)$ genügen
 dem schon aus früheren Abhandlungen Bekannten werden in 368 insbesondere
 stellen der Funktion $\Pi'(x)$ bestimmt, sowie die Funktionswerte $\Pi'(0)$, Π'
 ferner $\Pi'\left(\frac{1}{2}\right) : \Pi\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Pi'\left(\frac{3}{2}\right) : \Pi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\Pi'\left(\frac{5}{2}\right) : \Pi\left(\frac{5}{2}\right)$ usw.

1) Vgl. S. XLI. Wenn es auch nur Zweckmäßigkeitsüberlegungen sind, d
 der Funktionalgleichung nötigen, so haben sie doch tatsächlich etwas Zwingend

III. DIE TRIGONOMETRISCHEN FUNKTIONEN

Der hauptsächlichste Inhalt der Abhandlungen EULERS, über die in diesem Abschnitt berichtet werden soll, war für seine mathematischen Zeitgenossen etwas bewundernswertes. Wenn er für die heutigen Mathematiker vielleicht nicht ebenso fesselnd ist, so liegt dies daran, daß er dank EULER zum festen Bestandteil der mathematischen Bildung geworden ist. Daß er es war, der das Rechnen mit den trigonometrischen Funktionen zu einem brauchbaren und geschmeidigen Werkzeug der Analysis und ihrer Anwendungen gemacht hat, betont er selbst mit berechtigtem Stolz in der Einleitung zu der sofort näher zu besprechenden Abhandlung 246, und er fügt hinzu, man dürfe dieses Verdienst nicht deswegen gering achten, weil es zum guten Teil in der Einführung einer passenden Bezeichnungswaise bestohe. Die volle Bedeutung EULERS auf dem Gebiete der trigonometrischen Funktionen¹⁾ wird man freilich aus den paar hier zu besprechenden Arbeiten nicht ermessen können; sie beruht auf viel breiterer Grundlage, insbesondere auch auf den Anwendungen der Trigonometrie, die EULER in Geometrie, Mechanik und Astronomie gemacht hat.

In der Abhandlung 128 vom 15. Dezember 1749

Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales

(*Opera omnia* I4, p. 364—406) geht EULER von den Partialbruchreihen

$$(1) \quad \frac{1}{1 \pm p} \pm \frac{1}{4 \pm p} \pm \frac{1}{9 \pm p} \pm \frac{1}{16 \pm p} \pm \dots$$

aus und bemerkt, daß er deren Summen in der ein paar Wochen zuvor der Akademie vorgelegten Abhandlung 130 (vgl. S. XXIX) mitgeteilt habe. Aus ihnen gewinnt er Produktdarstellungen trigonometrischer Funktionen.²⁾ Außerdem berechnet er die Koeffizienten α_n , β_n

1) Vgl. u. A. v. BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, Teil II, Leipzig 1903, 4. Kapitel.

2) Da er in E 130 umgekehrt die Reihen (1) aus diesen Produkten abgeleitet hatte, kann man das oben Mitgeteilte nicht als eine neue Ableitung der Sinus- und Kosinusprodukte an-

der Potenzreihen von

$$\sin \frac{\pi}{2} x = \sum_1^{\infty} \alpha_v x^v \quad \text{und} \quad \cos \frac{\pi}{2} x = \sum_1^{\infty} \beta_v x^v$$

auf 28 Dezimalstellen (mit ganz unbedeutenden Ungenauigkeiten, die höchstens drei Dezimalstellen betreffen), ferner auf 20 und mehr Stellen die Koeffizientenreihen für

$$\log \left(\frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{2} x \right) \quad \text{und} \quad \log \cos \frac{\pi}{2} x$$

und auf 13 Stellen die Koeffizienten der Potenzreihen für $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ und $\frac{1}{x}$. Er dient er sich noch einer die Konvergenz verbessernden Umformung, indem bei der Funktion $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ nicht die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ der im Radius 1 besitzenden Potenzreihe

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x = \sum_1^{\infty} \gamma_v x^v$$

angibt, sondern die Koeffizienten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ der den Konvergenzradius 1 besitzenden Potenzreihe

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x = \frac{4x}{\pi(1-x^2)} = \sum_1^{\infty} \delta_v x^v.$$

Die ganze Abhandlung 128 kann als eine Vorarbeit für die *Introductio* werden, in die ihr wesentlicher Inhalt später übergegangen ist.

Die vorhin schon genannte Abhandlung 246

Subsidium calculi sinuum

(*Opera omnia* I₁₄, p. 542—584) ist am 9. März 1752 der Berliner und am 12. März 1753, der Petersburger Akademie vorgelegt worden. Sie beginnt mit den Abhandlungen EULERS, z. B. 447, 562) damit, daß an Stelle der $\cos \varphi$ die Ausdrücke

$$(2) \quad u = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad v = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

eingeführt werden (später werden dafür gewöhnlich die Buchstaben p, q an die Zeichen $e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$ für u, v werden nicht verwendet. Insbesondere mit Benutzung

schon, sondern nur als die Beleuchtung eines früher festgestellten Zusammenhangs. Erst aus der Ableitung der Reihen (1), die später in der nun entstandenen Abhandlung 60 bewiesen wurde (siehe S. XXXIII), läßt sich ohne besonderen Beweis für die Produktentwicklungen der trigonometrischen Funktionen

und auch die Produkte $\cos^m \varphi \sin^n \varphi$ (m, n ganzzahlig > 0) linear durch die Sinus und Kosinus der Vielfachen von φ ausdrücken, z. B.

$$2^{r+1} \cos^{2r+1} \varphi = \sum_{\nu=0}^r \binom{2r+1}{\nu} \cos (2r+1-2\nu) \varphi.$$

EULER nimmt fälschlich diese Formel auch für Potenzen des Kosinus mit negativ und gebrochenen Exponenten in Anspruch, wobei er die rechts stehende Summe in eine unendliche Reihe übergehen läßt. Besonders zu erwähnen ist noch das *Theorema* des § 1 (Opera omnia I₁₄, S. 581), das besagt:

Kennt man die Summe der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \quad (a_{\nu} \text{ reell, } z \text{ komplex})$$

(d. h. kann man sie durch die bekannten Funktionen ausdrücken), so kennt man auch die Summen der Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu \varphi, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \sin \nu \varphi.$$

Als Beispiele gibt EULER u. a. die folgenden:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a^{\nu} \cos \nu \varphi = \frac{\cos \varphi - a}{1 + a^2 - 2a \cos \varphi}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a^{\nu} \sin \nu \varphi = \frac{\sin \varphi}{1 + a^2 - 2a \cos \varphi}.$$

Indem er die erste dieser Gleichungen auch für $a = -1$ in Anspruch nimmt, gewinnt er aus ihr durch Integration die für $|\varphi| < \pi$ richtige Entwicklung

$$\frac{\varphi}{2} = \sin \varphi - \frac{\sin 2 \varphi}{2} + \frac{\sin 3 \varphi}{3} - \frac{\sin 4 \varphi}{4} + \dots \quad (\text{vgl. (33), S. LII}).$$

Das *Theorema* kehrt mit Beispielen später noch mehrmals bei EULER wieder (z. B. in den Abhandlungen 447, 655); auch in der *Analyse algébrique* von CAUCHY und in der Abhandlung ABELS über die binomische Reihe finden sich zugehörige Beispiele.

Die soeben genannte am 22. November 1733 der Petersburger Akademie vorgelegte Abhandlung 447 (Opera omnia I₁₆, p. 168—184)

Summatio progressionum $\sin^2 \varphi + \sin^2 2 \varphi + \dots + \sin^2 n \varphi$, $\cos^2 \varphi + \cos^2 2 \varphi + \dots + \cos^2 n$

beginnt wie 246 mit der Substitution (2); die in der Überschrift genannten endlichen Summen werden dann in den Fällen $\lambda = 1, 2, 3, 4$ bestimmt, was auf die Summation end

licher geometrischer Reihen hinausläuft. EULER erkennt, daß die unendlichen Reihe

$$\sum_0^{\infty} (\cos \nu \varphi)^{\lambda}, \quad \sum_1^{\infty} (\sin \nu \varphi)^{\lambda}$$

bei ganzzahligem $\lambda > 0$ divergieren (bei geradem λ sogar eigentlich gegen $+\infty$), will auf Grund seiner Auffassung der divergenten Reihen¹⁾ die für die endlichen Re fundene Summierung auch für die unendlichen in Anspruch nehmen, was ihn zu baren Ergebnissen führt.

In der Abhandlung 561 vom 15. November 1773

Variae observationes circa angulos in progressionem geometricam progredientes

(*Opera omnia* I₆, p. 498—508) wird zunächst durch wiederholte Anwendung der GL $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ das Produkt

$$(3) \quad \sin \varphi = \varphi \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \cdot \cos \frac{\varphi}{8} \cdot \cos \frac{\varphi}{16} \cdots$$

abgeleitet, das sich schon in der früheren Abhandlung 74 findet (vgl. Abschnitt VI. Berichtes). Aus (3) werden dann weitere Formeln abgeleitet, z. B. durch logarithmische Differentiation

$$(4) \quad \frac{1}{\varphi} = \cot \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{8} + \cdots$$

Die Reihe auf der rechten Seite von (4), aus der umgekehrt wieder (3) folgt, man auch, wie EULER zeigt, direkt summieren, wenn man alle vorkommenden Trigonometriefunktionen vermöge der Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = \cot \varphi - \cot 2\varphi$$

ersetzt. In gleicher Weise ergibt sich aus der Beziehung

$$(5) \quad \cot 3\varphi = \frac{1}{3} \cot \varphi - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + \varphi \right) + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - \varphi \right)$$

die Summation

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} = \cot \varphi + \frac{1}{3} & \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3} \right) \right) \\ & + \frac{1}{9} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{9} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{9} \right) \right) \\ & + \frac{1}{27} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{27} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{27} \right) \right) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

1) Vgl. S. XII.

Die Gleichung (5) führt durch Integration auf die folgende:

$$\sin 3 \varphi = 4 \sin \varphi \cos \left(\frac{\pi}{6} + \varphi \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \varphi \right).$$

Esprechen weitere Produktdarstellungen:

$$\sin 4 \varphi = 8 \sin \varphi \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right) \cos \varphi,$$

$$\sin 5 \varphi = 16 \sin \varphi \cos \left(\frac{\pi}{10} + \varphi \right) \cos \left(\frac{\pi}{10} - \varphi \right) \cos \left(\frac{3\pi}{10} + \varphi \right) \cos \left(\frac{3\pi}{10} - \varphi \right)$$

usw.,

wen dann wieder Reihen von der Art wie (4) abgeleitet werden können.

solche Produktdarstellungen der Funktionen $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ (für ganzzahliges $n > 0$)
 DER ausführlicher betrachtet in der am 12. Mai 1774 der Akademie vorgelegten Ab-
 562

Quomodo sinus et cosinus angulorum multiporum per producta exprimi queant

omnia I₁₆, p. 509—521).

Er findet diese Produkte, z. B.

$$\cos 2n\varphi = 2^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \sin \left(\frac{2^{i-1}}{2n} \pi - \varphi \right) \sin \left(\frac{2^{i-1}}{2n} \pi + \varphi \right),$$

er wie in den Abhandlungen 246, 247 an Stelle von $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ die Größen
 $p \pm i \sin \varphi$, $q = \cos \varphi - i \sin \varphi$ betrachtet und dann $p^n \pm q^n$ in Faktoren zerlegt.
 Der Inhalt dieser Abhandlung findet sich auch im 14. Kapitel der *Introductio* (*Opera*
 I₁₆, p. 258—283).

Die drei Abhandlungen 592 vom 14. August 1775, 636 vom 15. April 1776 und 655
 März 1777

De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices,

De multiplicatione angulorum per factores expedienda,

*ationes generales circa series, quarum termini secundum sinus vel cosinus angulorum
 multiporum progrediuntur*

(*Opera omnia* I₁₆, p. 621—660, I₁₆, p. 79—111 und p. 163—177)

nichts grundsätzlich Neues, sondern zumeist nur Wiederholung; die erste befaßt
 Partialbruchzerlegungen trigonometrischer Funktionen, wie sie auch in der Abhand-

durch Trennung des Realteils und Imaginärteils der Gleichung

$$(1 + z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \dots$$

ergeben ($z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $0 < r < 1$, n reell; Verallgemeinerung auf komplex in der ABEL'schen Abhandlung über die Binomialreihe).

Am gleichen Tage wie die zuletzt erwähnte Abhandlung 655, nämlich am 6. wurde auch die Abhandlung 686

*Dilucidationes super formulis, quibus sinus et cosinus angularum multiploarum expr
ubi simul ingentes difficultates diluuntur*

(*Opera omnia* I₁₆, p. 282–310) der Petersburger Akademie vorgelegt. Wenn Schwierigkeiten, von denen EULER in der Überschrift spricht, vom heutigen aus als solche kaum angesehen werden können, und wenn auch gegen die Lösung gibt, sich manches einwenden läßt, so entbehrt die Arbeit doch in geschichtlicher Hinsicht nicht des Reizes. EULER geht aus von der Formel, die $2 \cos n\varphi$ $n = 1, 2, 3, \dots$ als ein Polynom von $x = 2 \cos \varphi$ darstellt:

$$(6) \quad \begin{aligned} 2 \cos n\varphi &= x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-6} \\ &+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-8} - \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{n-10} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Er findet es sonderbar, daß die rechte Seite abbricht, sobald die Exponenten anfangen würden negativ zu werden, und daß für ein negatives oder gebrochenes n die rechte Seite, die dann zur unendlichen Reihe wird, nicht gleich $\cos n\varphi$ wird; er fragt, was ist der Wert der rechten Seite von (6), wenn die dort stehende Reihe als unendliche Reihe gefaßt wird, bei beliebigem n , und wie erhält man eine Formel, die $\cos n\varphi$ durch x ausdrückt und die für jedes n gilt? Um diese Frage zu beantworten, geht EULER zu dem folgenden Satz man

$$z = \cos \varphi, \quad s = \cos n\varphi,$$

so ist die so definierte Funktion s von z ein partikuläres Integral der

ung

$$\frac{ds^2}{1-s^2} = \frac{n^2 dz^2}{1-z^2},$$

auch der aus (7) durch nochmaliges Differenzieren entstehenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$z \frac{d^2 s}{dz^2} (1-z^2) - z \frac{ds}{dz} + n^2 s = 0.$$

allgemeines Integral mit den zwei willkürlichen Konstanten α, β ist

$$\alpha (z + \sqrt{z^2 - 1})^n + \beta (z - \sqrt{z^2 - 1})^n.$$

für das partikuläre Integral

$$s = \cos n\varphi,$$

wo $z = \cos \varphi$ gesetzt wurde, ist

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

Andrerseits erhält man als allgemeines Integral der Differentialgleichung (8) durch Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten

$$A \left(z^n + \frac{n}{4} z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} z^{n-6} + \dots \right) \\ + B \left(z^{-n} + \frac{n}{4} z^{-n-2} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} z^{-n-4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} z^{-n-6} + \dots \right).$$

Vergleichung mit (9) ergibt

$$A = 2^n \alpha, \quad B = \frac{\beta}{2^n}.$$

Vom aber nun EULER aus (9), (11) einerseits und (12), (13) andererseits schließt

$$\cos n\varphi = 2^{n-1} \left(z^n - \frac{n}{4} z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} z^{n-4} + \dots \right) \\ + \frac{1}{2^{n+1}} \left(z^{-n} + \frac{n}{4} z^{-n-2} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} z^{-n-4} + \dots \right)$$

Wieder $z = \cos \varphi$ gesetzt wird), so beachtet er nicht, daß (9), (10), (11) unter der Voraussetzung $|z| \leq 1$ gelten, die Reihen (12) aber für $|z| < 1$ nicht konvergieren. Nur wenn n eine positive ganze Zahl ist, heben sich in dem auf der rechten Seite von (12)

stehenden Integral der Differentialgleichung (8) alle Glieder mit negativen n weglassen, so erhält man als Integral ein Polynom in x , das mit $\cos n\varphi$ identisch sein muß, und kein anderes Polynom der Differentialgleichung genügt.

Der Inhalt der in den *Opera postuma* 1862 veröffentlichten Abhandlung

Enodatio insignis cuiusdam paradoxii circa multiplicationem angularum

(*Opera omnia* I⁶, p. 284—311) ist in der Hauptsache der gleiche wie der in der vorhergesprochenen Abhandlung 686. Im einzelnen sind die Überlegungen etwas anders geartet.

Wird noch eine Untersuchung der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ der Funktion $(1 - \cos x)^{-1}$ beigefügt. Aus Bemerkungen EULERS in 810 (noch deutlicher als aus solchen in 809) geht übrigens hervor, daß er schließlich doch nicht so von seiner Lösung der Aufgabe, $\cos n\varphi$ als Funktion von $\cos \varphi$ befriedigt war, wie man nach den Überlegungen in den vorhergehenden Arbeiten vermuten könnte; vgl. insbesondere E 810, § 22; *Opera omnia* I⁶, p. 298. Er sagt dort bei Betrachtung eines Zahlenbeispiels, daß zwar zweifellos die beiden Reihen auf der rechten Seite von (12) den richtigen Wert liefern, aber es nicht klar sei, wie man ihn daraus berechnen könne; ein bedeutsames ungelöstes Paradoxon bleibe übrig. Und wenn er sich notgedrungen mit seiner früheren Definition der Reihensumme beruhigt, obwohl sie im vorliegenden Falle durch Zahlenrechnung entartet, so betont er doch nochmals in § 23, daß die Schwierigkeiten übrig bleiben.

Die Abhandlung 703 vom 26. Mai 1779

*Methodus facilis inveniendi series per sinus cosinusve angularum multiplicatae
quarum usus in universa theoria astronomiae est amplissimus*

(*Opera omnia* I⁶, p. 311—332) und die mit ihr zusammenhängende, drei Tage später vorgelegte Abhandlung 704

Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuiusdam anguli periodicis

(*Opera omnia* I⁶, p. 333—355) behandeln mit glücklichstem Erfolg die vorgelegte Aufgabe, die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, \dots der Entwicklung einer Funktion $f(\varphi)$ in

$$(15) \quad f(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi + \dots$$

zu bestimmen. Von Sinusreihen ist im Gegensatz zur Überschrift der Abhandlung die Rede; das Fehlen dieser naheliegenden Ergänzung, wie auch daß EULER in der Abhandlung 704, die eine der bedeutendsten seines Alters ist, ganz geg-

0 und $\omega = \frac{\pi}{n}$ ist):

$$(6) \quad \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} f(0) + f(\omega) + f(2\omega) + \dots + f((n-1)\omega) + \frac{1}{2} f(\pi) \right) = a_0 + a_n + a_{2n} + a_{3n} + \dots$$

und für $\nu = 1, 2, \dots, n-1$

$$(7) \quad \frac{2}{n} \left(\frac{1}{2} f(0) + \cos \nu \omega f(\omega) + \cos 2\nu \omega f(2\omega) + \dots + \cos (n-1)\nu \omega f((n-1)\omega) + \frac{1}{2} \cos \nu \pi f(\pi) \right) \\ = a_\nu + a_{2n-\nu} + a_{2n+\nu} + a_{4n-\nu} + a_{4n+\nu} + a_{6n-\nu} + a_{6n+\nu} + \dots$$

Die linke Seite von (16) liefert, wenn nicht den genauen Wert von a_0 , so doch in vielen Fällen einen guten Näherungswert; ebenso kann die linke Seite von (17) zur Berechnung von a_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n-1$) benutzt werden. In der Abhandlung 704 erscheint zum ersten Male die uns heute so geläufige Darstellung

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\varphi) d\varphi, \quad a_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\varphi) \cos \nu \varphi d\varphi \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

für die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe

$$f(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi + \dots$$

Zum Schlusse wird dann noch die Reihe (15) in eine nach Potenzen von $\cos \varphi$ fortschreitende Reihe umgeformt.

In der Abhandlung 747 vom 13. März 1780

De scribis memorabilibus, quibus sinus et cosinus angularum multiporum exprimere licet (*Opera omnia* I 6*, p. 214—231) stellt sich EULER die Aufgabe, die Funktion $\cos 2x\omega$ in eine Binomialkoeffizientenreihe¹⁾ zu entwickeln:

$$\cos 2x\omega = 1 + Ax + B \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + C \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

1) Hinsichtlich solcher Reihen darf auf die *Vorlesungen über Differenzenrechnung* (Leipzig 1924) von N. E. NÖRLUND und das beigegebene ausführliche Literaturverzeichnis, wie auch auf den NÖRLUNDschen Artikel II 07 der *Encyclopädie der math. Wiss.* Bd. II₃ (Leipzig 1923 bis 1927), S. 675 verwiesen werden.

(18)

$$\begin{aligned}\cos 2x\omega &= 1 - 2 \binom{x}{1} \sin \omega \sin \omega - 4 \binom{x}{2} \sin^2 \omega \cos 2\omega \\ &+ 8 \binom{x}{3} \sin^3 \omega \sin 3\omega + 16 \binom{x}{4} \sin^4 \omega \cos 4\omega \\ &- 32 \binom{x}{5} \sin^5 \omega \sin 5\omega - 64 \binom{x}{6} \sin^6 \omega \cos 6\omega \\ &+ \dots\end{aligned}$$

Für $\sin 2x\omega$ ergibt sich die Reihe

$$\begin{aligned}\sin 2x\omega &= 2 \binom{x}{1} \sin \omega \cos \omega - 4 \binom{x}{2} \sin^2 \omega \sin 2\omega \\ &- 8 \binom{x}{3} \sin^3 \omega \cos 3\omega + 16 \binom{x}{4} \sin^4 \omega \sin 4\omega \\ &+ 32 \binom{x}{5} \sin^5 \omega \cos 5\omega - 64 \binom{x}{6} \sin^6 \omega \sin 6\omega \\ &- \dots\end{aligned}$$

EULER unterläßt nicht, die rechte Seite von (18) nach Potenzen von x dann mit der Reihe

$$\cos 2x\omega = 1 - \frac{4x^2\omega^2}{2!} + \frac{16x^4\omega^4}{4!} - \dots$$

zu vergleichen. Das Verschwinden des Koeffizienten von x^1 drückt sich beiden Reihen

$$\frac{2}{1} \sin \omega \sin \omega - \frac{2^3}{3} \sin^3 \omega \sin 3\omega + \frac{2^5}{5} \sin^5 \omega \sin 5\omega - \dots$$

und

$$\frac{2^2}{2} \sin^2 \omega \cos 2\omega - \frac{2^4}{4} \sin^4 \omega \cos 4\omega + \frac{2^6}{6} \sin^6 \omega \cos 6\omega - \dots$$

einander identisch gleich sind. Zur Probe beweist er auf anderem Wege

achtet die beiden allgemeineren Reihen

$$s = \frac{b \sin \omega}{1} - \frac{b^3 \sin 3 \omega}{3} + \frac{b^5 \sin 5 \omega}{5} - \frac{b^7 \sin 7 \omega}{7} + \dots$$

$$t = \frac{b^2 \cos 2 \omega}{2} - \frac{b^4 \cos 4 \omega}{4} + \frac{b^6 \cos 6 \omega}{6} - \frac{b^8 \cos 8 \omega}{8} + \dots$$

gt, daß

$$s = \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 + 2 b \sin \omega) - \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 - 2 b \sin \omega)$$

$$t = \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 + 2 b \sin \omega) + \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 - 2 b \sin \omega)$$

her im Falle $b = 2 \sin \omega$

$$s = t$$

IV. DER BINOMISCHE SATZ, BINOMIALKOEFFIZIENTENFORMELN

Von den neun Abhandlungen, die in diesem Abschnitt besprochen werden sollen, 465 vom 1. Juli 1773

*Demonstratio theorematis NEWTONIANI de evolutione potestatum binomii pro casibus
quibus exponentes non sunt numeri integri*

(*Opera omnia* I₁₅, p. 207—216) nicht nur zeitlich die erste; sie ist auch von ganz besonderer Bedeutung und Schönheit. EULER weist einleitend darauf hin, daß ihm in den *tutiones calculi differentialis* beim Beweise der für $|x| < 1$ gültigen Gleichung

$$(1) \quad (1+x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots,$$

wo

$$(2) \quad \binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \nu},$$

für den Fall eines beliebigen reellen Exponenten α ein Zirkelschluß unterlaufen ist. In Abhandlung 465 geht er nicht von der in eine Potenzreihe zu entwickelnden Funktion $(1+x)^{\alpha}$ aus, sondern unter Annahme eines vorläufig festen x von der auf der rechten Seite von (1) stehenden Reihe, die er als Funktion φ von α betrachtet. Als bekannt darf er voraussetzen, daß für ganzzahliges $\alpha = n > 0$

$$(3) \quad \varphi(\alpha) = (1+x)^{\alpha}$$

ist; außerdem beweist er, daß die Funktion $\varphi(\alpha)$ der Funktionalgleichung

$$(4) \quad \varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \varphi(\alpha+\beta)$$

genügt. Mit leichten Ergänzungen der EULERSchen Überlegungen schließt man aus (4), daß für $|x| < 1$ und alle reellen α

$$\varphi(\alpha) = (1+x)^{\alpha}$$

sein muß.

Drei Jahre nach diesem sehr schönen Beweise für den allgemeinen binomischen Lehrsatz gab EULER in der am 20. Mai 1776 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung 337

*Nova demonstratio, quod evolutio potestatum binomii NEWTONIANA
etiam pro exponentibus fractis valeat*

in *omnia I* 16, p. 112—121) einen zweiten Beweis, der als mißglückt bezeichnet werden kann. Schon die von EULER als selbstverständlich gemachte Annahme, daß $(1+x)^\alpha$ sich in eine Reihe

$$\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$$

entwickeln läßt, bedürfte eines Beweises, ebenso die Behauptung, daß alle Koeffizienten $a_\nu > 0$ den Faktor α haben. EULER macht dann den Ansatz

$$(1+x)^{\alpha+1} = \sum_0^\infty b_\nu x^\nu$$

und zieht aus den Gleichungen

$$b_\nu = a_\nu + a_{\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

die Formeln für die Koeffizienten a_ν abzuleiten.

Dies geschieht in der Abhandlung 743 vom 20. Dezember 1779

De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque exprimi potest

in *omnia I* 16*, p. 162—177) macht EULER für $(1+x)^\alpha$ einen ganz anderen Reihenausdruck, nämlich

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= A + \alpha B + \alpha(\alpha-1)C + (\alpha+1)\alpha(\alpha-1)D \\ &\quad + (\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)E \\ &\quad + (\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)F + \dots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten A, B, C, D, \dots sind Funktionen von x , die EULER bestimmt, indem er (5) nacheinander $\alpha = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4$ usw. setzt. (Einfacher und richtiger ist es, ein bekanntes auf Differenzenrechnung beruhendes Interpolationsverfahren zu benutzen.) Das Ergebnis ist die Reihe

$$\begin{aligned} &+ \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} \frac{x^2}{1+x} + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{x^3}{1+x} \\ &+ \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{x^5}{(1+x)^2} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

die für $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ abbricht, im übrigen für $\left| \frac{x^2}{1+x} \right| < 1$ konvergiert, der aber von vornherein nicht feststeht, daß ihr Grenzwert $(1+x)^\alpha$ ist.

Dies beweist nun EULER hinterher auf geistvolle Weise. Er setzt

$$\frac{x^2}{1+x} = z,$$

erhält so für (5a) die Summe der beiden Reihen

$$s = 1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} z + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{4!} z^2 + \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{6!} z^3 + \dots$$

und

$$u = \alpha x + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{3!} x^2 + \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{5!} x^3 + \dots$$

und zeigt schließlich (sogar auf mehrere Weisen), daß

$$s = \frac{(1+x)^\alpha + (1+x)^{1-\alpha}}{x+2}, \quad u = \frac{(1+x)^{\alpha+1} - (1+x)^{1-\alpha}}{x+2},$$

mithin

$$s + u = (1+x)^\alpha$$

ist.

Die übrigen sechs Abhandlungen, auf die in diesem Abschnitt hingewiesen ist, dehn nicht sowohl von der Funktion $(1+x)^\alpha$ als von den Binomialkoeffizienten

$$\frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-\nu+1)}{\nu!}.$$

Für diese führt EULER in der am 13. Mai 1776, also ungefähr gleichzeitig mit dem wähten zweiten Beweise der Gleichung (1) vorgelegten Abhandlung 575

De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quaecunque erecti occurrunt

(*Opera omnia* I₁₆, p. 528–568) das Zeichen $\left[\frac{\alpha}{\nu} \right]$ ein, das sich von dem heute üblichen fast nicht unterscheidet. Er leitet Formeln ab wie

$$\binom{\alpha}{\nu} + \binom{\alpha}{\nu-1} = \binom{\alpha+1}{\nu}$$

$$(6) \quad \binom{0}{q} \binom{1}{q+1} + \binom{1}{q} \binom{2}{q+2} + \dots + \binom{p-1}{q} \binom{p}{q+p} = \binom{p+n}{q+n}.$$

Aus (6) folgt für $p = n$, $q = 0$ folgende an die Spitze der Abhandlung gestellte Gleichung

$$(7) \quad 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n},$$

die außerhalb des Zusammenhangs mitgeteilt etwas Verblüffendes hat. Für (7) gibt es einen anderen hübschen Beweis, der sich auf Überlegungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gründet.

EULER erkennt, daß das Produkt auf der rechten Seite von (7), wie auch der allgemeinere Ausdruck (6) sich durch Betafunktionen ausdrücken läßt; so findet er z. B. für die Integraldarstellung

$$(8) \quad \frac{1}{(q+n) \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q+n-1} dx},$$

die dann hinterher erlaubt, die auf der linken Seite von (6) stehende Funktion von p , auch für solche Fälle zu erklären, in denen p, q, n keine positiven ganzen Zahlen sind, wobei freilich noch von EULER nicht ausdrücklich hervorgehobene Einschränkungen wegen der möglichen Divergenz des Integrals (8) zu machen wären. In dem besonderen Falle der auf der linken Seite von (7) stehenden Summe $S(n)$ ergeben sich für $S\left(\frac{1}{2}\right)$, $S\left(\frac{3}{2}\right)$, $S\left(\frac{5}{2}\right)$ usw. Werte, die zu $\frac{1}{\pi}$ in rationalem Verhältnis stehen, z. B.

$$S\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{24}{7} \cdot \frac{32}{9}.$$

EULER fragt auch, welche Beziehung zwischen n, p, q stattfinden muß, wenn das Integral (8) in geschlossener Form auswertbar sein soll, und er findet so im Falle $q = p = 1 - n$ aus (7), (8) die folgende Reihe

$$(9) \quad 1 - \frac{n^2}{1} + \frac{n^2(n^2-1)}{1 \cdot 4} - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1 \cdot 4 \cdot 9} + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 25} - \dots = \frac{\sin n\pi}{n\pi},$$

die für alle Werte von n konvergiert.¹⁾

1) Über die Entdeckungsgeschichte dieser Formel und ähnlicher siehe *Encyclopädie math. Wissenschaften* II_{3,1}, Leipzig und Berlin 1909–1920, S. 35. Vgl. auch die Anmerkung S. L.

Die Abhandlungen 584 vom 2. September 1776

De insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomiorum

(*Opera omnia* I₁₅, p. 604—620) und 709 vom 6. Juli 1778

De evolutione potestatis polynomialis cuiuscunque

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.})^n$$

(*Opera omnia* I₁₆, p. 28—40) beschäftigen sich mit den Koeffizienten der Reihe

$$1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

für eine Polynompotenz der Form $(1 + x + x^2 + \dots + x^p)^n$ (n beliebig reell); Beziehungen zwischen diesen Koeffizienten gefunden, darunter Verallgemeinerungen (6) und (7).

In der Abhandlung 663 vom 30. September 1776

Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii

(*Opera omnia* I₁₆, p. 193—234) wird der Zusammenhang zwischen Reihen der Form

$$1 + \binom{x}{0} \binom{y}{0} + \binom{x}{1} \binom{y}{1} + \binom{x}{2} \binom{y}{2} + \dots$$

und ähnlichen Reihen einerseits und der Betafunktion andererseits vertieft untersucht; ein neuer Beweis für (6) wird in der Abhandlung 726 vom 17. September 1778

Demonstratio insignis theorematum numerici circa uncias potestatum binomii

(*Opera omnia* I₁₆, p. 104—116) hergeleitet: von dem Produkt

$$\left(1 - \frac{z^2}{1 - z}\right)^{q+1} \cdot \left(1 + \frac{z}{1 - z}\right)^p$$

wird zuerst der zweite Faktor nach Potenzen von $\frac{z}{1 - z}$ entwickelt; dann wird das Produkt in eine Reihe nach Potenzen von z umgeordnet; doch nimmt EULER eine hinreichende Begründung den zunächst nur unter Beschränkungen für p, q, n gültigen allgemeineren in Anspruch.

In der Abhandlung 768 endlich, die am 3. Dezember 1781 der Akademie vorgelesen worden ist und die den Titel hat

De unciis binomii earumque interpolatione

(*Opera omnia* I₁₆, p. 241—266), geht EULER von der für ganze positive n, q ob-

(und für beliebige reelle n bei ganzen $q > 0$ leicht zu bestätigenden) Formel

$$\binom{n}{q} = \frac{|n|}{[q][n-q]}$$

und verwendet sie, um das Zeichen $\binom{n}{q}$ allgemein für reelle n, q zu definieren. Er Sätze ab wie diesen:

Die Ausdrücke

$$\binom{n}{a} \binom{n-a}{b} \binom{n-a-b}{c}$$

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{n-a} dx \cdot \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{n-a-b} dx \cdot \int_0^1 x^{c-1} (1-x)^{n-a-b-c} dx$$

ihren Wert nicht, wenn man die Buchstaben a, b, c untereinander beliebig vertauscht. werden auch Formeln angegeben, welche die Berechnung von $\binom{p}{q}$ auf die Fälle zurück-
führen, in denen p und q zwischen 0 und 1 liegen. Auch wird der Verlauf der auf recht-
winklige Koordinaten x, y bezogenen Kurven $y = \binom{m}{x}$ für ganzzahlige Werte von m untersucht.

V. BESONDERE REIHEN UND FUNKTIONEN

In der Abhandlung 72

Variæ observationes circa series infinitas

(*Opera omnia* I₁₄, p. 216—244), die EULER am 25. April 1737 der Petersburg vorgelegt hat, bestimmt er die Summen sehr merkwürdiger Reihen der Form

$$(1) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n_r},$$

wo die n_r ganze (positive oder negative) Zahlen sind. Den Ausgangspunkt Reihensummation, die CHR. GOLDBACH brieflich an EULER samt Beweis mitgeteilt, nämlich

$$(2) \quad 1 = \sum_{\substack{\mu, r \\ \mu \geq 2}} \frac{1}{\mu^r - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \dots$$

Der Beweis benutzt divergente Reihen, läßt sich aber mit Erhaltung des Grundsatzes richtig machen, wie überhaupt alle Ergebnisse dieser Abhandlung 72 richtig sind. In denselben Überlegungen wie bei (2) leitet EULER noch weitere Reihensummen ab,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mu, r \\ \mu \geq 3}} \frac{1}{(2\mu - 2)^r - 1} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \dots \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mu, r \\ \mu \geq 2}} \frac{1}{(2\mu - 1)^r - 1} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \dots \\ &= 1 - \log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mu \geq 3, r \geq 3}} \frac{1}{\mu^r - 1} &= \frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \frac{1}{624} + \dots \\ &= \frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

1) Vgl. die Anmerkung I₁₄, p. 216. Weitere Literatur über diese GOLDBACH verwandte Reihen, siehe *Encyclopädie der math. Wiss.*, Bd. II₁, S. 180, wo übrigens BACH noch EULER erwähnt wird.

tzte dieser Beispiele war EULER auch von GOLDBACH mitgeteilt worden, doch ohne, für den EULER die von ihm entdeckte Gleichung

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$$

t.

Im zweiten Teil der Abhandlung 72 leitet EULER andere Reihen der Form (1) ab, inwieweit die n , Primzahlen sind oder doch die Primfaktorenzerlegung der n , eine Rolle spielt. Er beweist zunächst die späterhin für die Theorie der RIEMANN'schen Zetafunktion wichtig gewordene Identität¹⁾

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^s} = \prod_{p_1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} + \dots\right)^{-1},$$

wo p_i die Primzahlen bedeuten ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$). Da er den Wert der auf der linken Seite von (3) stehenden Funktion $\xi(s)$ für $s = 2, 4, 6, \dots$ kennt, gelangt er zu Identitäten von vielen unendlichen Produkten, z. B. (Theorema 9):

Bringt man für $v = 2, 3, 4, \dots$ die Primzahlquadrate p_i^2 auf die Form

$$p_i^2 = 2q_i + (2q_i + 1) \quad (\text{also } 9 = 4 + 5, 25 = 12 + 13, 49 = 24 + 25, \dots),$$

$$\prod_{i=3}^{\infty} \frac{2q_i + 1}{2q_i} = \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{61}{60} \cdot \frac{85}{84} \cdot \frac{145}{144} \cdots = \frac{3}{2};$$

(Theorema 12): Zerlegt man für $v \geq 2$ die Primzahlen p_i in zwei Summanden $r_i + s_i$, deren Differenz $|s_i - r_i| = 1$ ist und von denen r_i eine gerade, s_i eine ungerade Zahl ist,

$$\prod_{i=3}^{\infty} \frac{r_i}{s_i} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdots = 2.$$

Wegen der von EULER mitgeteilten Reihensummen ist sein Beweis unvollständig und kann durch tiefer liegenden Überlegungen der Primzahlentheorie, für die diese Reihen von Bedeutung geworden sind, richtig gemacht werden; hierzu gehören die Summationen²⁾

$$\frac{(\nu)\lambda(\nu)}{\nu} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \dots = \frac{\pi}{2} \quad (\text{Theorema 15})$$

¹⁾ Auch *Introductio* § 283 (*Opera omnia* 1a, p. 299).

²⁾ Vgl. E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und Berlin 1909, Bd. 2, S. 571 und 673.

und

$$\sum_1^{\infty} \frac{\lambda(v)}{v} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \dots = 0 \quad (T)$$

[Dabei ist $\lambda(1) = 1$, $\lambda(v) = (-1)^{\rho}$ für ein aus ρ Primfaktoren (mehrfache m zusammengesetztes v ; $\chi(v)$ ist Null für gerades v , $+1$ für $v = 4\mu + 1$, -1 f

Den Schluß der Abhandlung 72 bildet eine Bemerkung EULERS, die r Schreibweise etwa so fassen würde:

$$\sum_{v, \leq [x]} \frac{1}{v} = \log \log x + O(1)$$

(vgl. LANDAU, a. a. O. Bd. I, S. 102; $[x]$ bedeutet in dieser Formel die größte ganze Zahl).

In der Abhandlung 247

De seriebus divergentibus

(*Opera omnia* II, p. 585—617), die am 27. Oktober 1746 der Berliner un 1753 der Petersburger Akademie vorgelegt worden ist, setzt EULER ausfüh drücklich seine Meinung über den Gebrauch divergenter Reihen auseinander

Über diese grundsätzlichen Fragen wurde in der Einleitung dieser Üb lich berichtet. Es bleibt daher nur noch übrig, auf die besonderen Beispiele denen EULER in der Abhandlung *de seriebus divergentibus* seine allgemeine T

Noch ehe diese Abhandlung 1760 im Drucke erschienen war, hatte e *tutiones calculi differentialis*¹⁾ durch die Substitution

$$x = \frac{z}{2 - z}, \quad z = \frac{2x}{1 + x}$$

die Reihe

$$\sum_0^{\infty} a_v x^v \text{ in eine Reihe } \sum_0^{\infty} b_v \left(\frac{2x}{1+x} \right)^v$$

transformiert, und er hatte bemerkt, daß die Reihe $\sum_0^{\infty} b_v$ konvergieren die Reihe $\sum_0^{\infty} a_v$ zu konvergieren braucht. In solchen Fällen betrachtet er d

$$\sum_0^{\infty} b_v \text{ als Summe der divergenten Reihe } \sum_0^{\infty} a_v.$$

1) *Partis posterioris caput I: De transformatione serierum; Opera omnia* I

$$\sum_0^{\infty} (-1)^r = \frac{1}{2}, \quad \sum_0^{\infty} (-1)^r r = \frac{1}{4},$$

$$\sum_0^{\infty} (-1)^r r^2 = 0, \quad \sum_0^{\infty} (-1)^r r^3 = \frac{1}{4}$$

summiert werden können, und versucht es dann auf die den hauptsächlichlichen Gegenstand der Abhandlung 247 bildende hypergeometrische Reihe¹⁾

$$(4) \quad 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \dots$$

anzuwenden, die er als Wert der Funktion

$$(5) \quad s(x) = x - x^2 + 2! \cdot x^3 - 3! \cdot x^4 + 4! \cdot x^5 - 5! \cdot x^6 + \dots$$

an der Stelle $x = 1$ ansieht. Da er (was uns heute nicht wundern kann) zu keinem Erfolge gelangt²⁾, betrachtet er die Reihe (4) als Wert für $x = 0$ einer ganz anderen Funktion, nämlich als Summe der Interpolationsreihe

$$\varphi(x) = 1 + (x - 1) + (x - 1)(x - 2) + (x - 1)(x - 2)(x - 3) + \dots$$

für $x = 0$. Er bildet die Werte

$$\frac{1}{\varphi(1)}, \quad \frac{1}{\varphi(2)}, \quad \frac{1}{\varphi(3)}, \quad \dots$$

und versucht nach den Regeln der Differenzenrechnung die Funktion $\frac{1}{\varphi(x)}$ in eine Interpolationsreihe

$$(6) \quad \frac{1}{\varphi(x)} = c_0 + c_1(x - 1) + c_2(x - 1)(x - 2) + c_3(x - 1)(x - 2)(x - 3) + \dots$$

1) Wegen dieser Bezeichnung vgl. S. XLII.

2) Allerdings gelangt EULER zu der Näherung 0,58 des richtigen Wertes 0,596...; aber bei anderer Anordnung der Rechnung, insbesondere, wenn er die benutzte Reihe an einer späteren oder früheren Stelle abgebrochen hätte, wäre die Annäherung schlechter ausgefallen, so daß die Vermutung erlaubt ist, die gefundene Näherung sei nicht unbeeinflusst durch die Kenntnis des auf anderem Wege (vgl. oben (8), (9)) gefundenen richtigen Wertes. EULER bezeichnet selbst diese seine erste Methode als nicht recht geeignet (non satis aptam) für eine genauere Berechnung. Dem oben gemachte Einwand gilt auch für die beiden nächsten Berechnungen, welche die oben mit $\varphi(x)$ bezeichnete Funktion benutzen und ungefähr die gleiche Genauigkeit wie die erste erreichen. EULER selbst hat sich diesen Einwand gemacht (vgl. I, 4, S. 600, erste und folgende Zeilen) und schließlich auch die beiden von $\varphi(x)$ ihren Ausgang nehmenden Wege verworfen („haec methodus non satis est certa“; „hoc modo neque satis tuto neque satis commode ad cognitionem valoris A perveniri potest“).

zu entwickeln. Die Hoffnung, den gesuchten Summenwert der Reihe als die rechte Seite von (5) zu gewinnen, scheitert an der Divergenz der Reihe (6).¹⁾ ergeht es beim Versuch, $\log q(x)$ statt $\frac{1}{q(x)}$ in eine Reihe der Form (6). Nach diesen Fehlschlägen kehrt EULER wieder zu der Reihe (5) zurück und sie formal der Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dx} + \frac{s}{x^2} - \frac{1}{x} = 0$$

genügt und daß andererseits

$$(7) \quad s(x) = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt$$

das für $x=0$ verschwindende Integral dieser Differentialgleichung ist.¹⁾ und (7) $x=1$ setzt, kommt EULER zu der Gleichung

$$(8) \quad \begin{aligned} & 1 - 1 + 2! - 3! + 4! - 5! + \dots \\ & = e \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx. \end{aligned}$$

Das auf der rechten Seite von (8) stehende Integral berechnet er nach dem trapezverfahren, wobei er die Strecke $0 \dots 1$ in 10 gleiche Teile teilt, aus denen vier richtig sind.

Zu einer zweiten Summierung der Reihe (5) gelangt EULER noch auf einem sehr merkwürdigen Wege: Er erkennt, daß diese divergente Reihe sich als Kettenbruch darstellen läßt

$$(9) \quad \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{5x}{1 + \dots}}}}}}}}}}$$

1) Daß tatsächlich $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt}{e^{-\frac{1}{x}}} = 0$ ist, wird von EULER nicht ausdrücklich bemerkt, folgt aber leicht aus der sog. DE L'HOSPITALSchen Regel.

der auf neun Dezimalstellen richtig ist.¹⁾

Zum Schlusse der Abhandlung 247 verallgemeinert EULER die zwischen der Reihe (9) und dem Kettenbruch (9) gefundene Beziehung, indem er zeigt, daß der konvergente Kettenbruch

$$(10) \quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{mx}{1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(m+n)x}{1 + \cfrac{2nx}{1 + \cfrac{(m+2n)x}{1 + \cfrac{3nx}{1 + \cfrac{(m+3n)x}{1 + \cfrac{4nx}{1 + \dots}}}}}}}}}$$

nach Potenzen von x entwickelt die divergente Reihe

$$(11) \quad 1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \dots$$

liefert. Er setzt insbesondere $m = 1$, $n = 2$, $x = 1$ und bestimmt durch den sich so ergebenden Wert des Kettenbruchs (10) die Summe der Reihe

$$1 - 1 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + \dots$$

zu 0,65568.

Die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen dem Kettenbruch (10) und der Reihe (11) wird wiederholt in der Abhandlung 616 vom 11. Januar 1776

De transformatione seriei divergentis

$$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \text{etc.}$$

in fractionem continuam

(*Opera omnia* I₁₆, p. 34—46).

1) Vgl. *Institutiones calculi differentialis, partis posterioris caput I*; *Opera omnia* I₁₀, insbesondere auch die Anmerkung 2, p. 226.

(In einem Anhang zu dieser Arbeit wird der BROUNCKERsche Kettenbruch¹⁾ fi

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

in die LEIBNIZsche Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

umgeformt, als deren erster Entdecker mit Recht GREGORY genannt wird.)

Die drei Abhandlungen 326 vom 21. Dezember 1763

Observationes analyticae

(*Opera omnia* I₁₆, p. 50—69), 551 vom 18. Mai 1772

Varia artificia in serierum indolem inquirendi

(*Opera omnia* I₁₆, p. 383—399) und 722 vom 17. August 1778

Disquisitiones analyticae super evolutione potestatis trinomialis $(1 + x + xx)^n$

(*Opera omnia* I₁₆, p. 56—103) behandeln eine und dieselbe Aufgabe, nämlich die für α_n sei der Koeffizient von x^n in dem Polynome, das gleich $(1 + x + x^2)^n$ ist ($n = 0, 1, 2, \dots$), $\beta_{n-\nu}$ sei in dem nämlichen Polynome der Koeffizient von $x^{n-\nu}$ (und damit zugleich $x^{\nu+1}$) ($\nu \leq n$); es handelt sich dann darum, welche Funktionen dargestellt werden die Reihen

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\mu} x^{\mu}, \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \beta_{\mu} x^{\mu}.$$

Das Ergebnis, das sich vollständig schon in der ersten der drei genannten A findet, lautet

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\mu} x^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-2x-3x^2}},$$

$$\sum_{\nu}^{\infty} \beta_{\mu-\nu} x^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-2x-3x^2}} \left(\frac{1-x-1\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2} \right)^{\mu}.$$

In dieser Arbeit löst EULER auch noch folgende allgemeinere Aufgabe: Welche wenn γ_n der Koeffizient von x^n in dem nach Potenzen von x entwickelten Pol

1) Vgl. S. VII.

Die Antwort lautet:

$$\sum_0^\infty \gamma_\mu x^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - 2bx + (b^2 - 4ac)x^2}}.$$

Die beiden anderen Arbeiten 551 und 722 bringen keine neuen Ergebnisse, unterscheiden sich aber (besonders 722) in der Beweisführung von 326.

In den drei erwähnten Abhandlungen steckt viel bewundernswerter echt EULERScher Scharfsinn; es ist nicht anzunehmen, daß unter den hentigen Mathematikern viele finden genug sind, um die Sätze von 326 beweisen zu können. Wenn trotzdem diese EULERSchen Untersuchungen keinen Platz in der Geschichte der Mathematik gefunden haben, so liegt daran, daß sie abseits außer Zusammenhang mit den großen Fragen der Wissenschaft stehen und daher mehr den Eindruck einer sehr geistreichen Spielerei machen. Den gleichen Eindruck machte wohl ein Jahrhundert lang die im Jahre 1749 in der Berliner Akademie gelesene, aber erst 1768 gedruckte Abhandlung 352

Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques (*Opera omnia* I 16, p. 70—90), bis dann RIEMANN in seiner berühmten 1859 in den Monatsberichten der Berliner Akademie erschienenen Arbeit

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen GröÙe

(Werke, 2. Auflage, Leipzig 1892, S. 145—153) ohne Kenntnis der EULERSchen Abhandlung¹⁾ den gleichen Gegenstand aufgriff, der von da an immer mehr in den Vordergrund mathematischer Forschung rückte. Das Ergebnis der Abhandlung 352 ist die Funktionalgleichung der Funktion²⁾

$$\xi(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{p^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

1) Auf die ganz vergessene Leistung EULERS hat erst im Jahre 1894 CAHEN im Band 113 der Pariser *Annales de l'école normale* aufmerksam gemacht. Herr E. LANDAU hat dann im Bande 73 der *Bibliotheca mathematica* 1906—1907, S. 69—79 auf die große Bedeutung der EULERSchen Abhandlung 352 hingewiesen und die EULERSchen Ansätze hinsichtlich der Strenge der Beweisführung ergänzt. Heute kann man dasselbe schneller erreichen.

2) Unter $\xi(s)$ möge ganz im Sinne EULERS nicht nur die auf der rechten Seite der obigen Gleichung stehende Reihe, soweit sie konvergiert, verstanden werden, sondern zugleich die durch analytische Fortsetzung dieser Reihe sich ergebende meromorphe Funktion. Ebenso bedeute $\varphi(s)$ die durch die Reihe auf der rechten Seite von (12) definierte ganze Funktion, gleichviel ob für

oder eigentlich die damit gleichbedeutende Funktionalgleichung der Funktion

$$(12) \quad \varphi(s) = \xi(s) - \frac{1}{2^s} \xi(s) = (1 - 2^{1-s}) \xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots$$

Diese Funktionalgleichung lautet

$$(13) \quad \frac{\varphi(1-s)}{\varphi(s)} = - \frac{[s-1](2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\pi^s} \cos \frac{s\pi}{2};$$

dabei bedeutet $[s-1]$ die EULERSche später mit $\Gamma(s)$ bezeichnete Funktion.¹⁾

Der EULERSche Gedankengang läßt sich in heutiger Bezeichnungsweise etwa stellen.

Daß

$$(13a) \quad \varphi(2k) = \frac{(-1)^{k+1} (2^{2k-1} - 1) B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}$$

ist ($k = 1, 2, 3, \dots$), hatte EULER schon früher bewiesen (s. den I. Abschnitt der richtigen). Andererseits erhielt er für $s = -k$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) divergente Reihen, summieren konnte²⁾:

$$(14) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n^k = \frac{(-1)^{k+1} (2^{k+1} - 1)}{k+1} B_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Dabei war die linke Seite von (14) zunächst erklärt als Wert für $x = 1$ der die Potenzreihe

$$(14a) \quad f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n^k x^n$$

definierten rationalen Funktion. Da sowohl $f_k(1)$ wie $\varphi(-k)$ durch die divergente Reihe auf der linken Seite von (14) dargestellt werden, erschien für EULER die Gleichung $f_k(1) = \varphi(-k)$ selbstverständlich; der in Wirklichkeit notwendige Beweis ergibt sich daraus, daß einerseits die ganze Funktion $\varphi(s)$ für jeden beliebigen Wert s insbesondere für $s = -k$ durch CESÀROSche Summation aus der Reihe auf der rechten Seite von (14a) berechnet werden kann und daß andererseits $f_k(1)$ aus der Reihe auf der rechten Seite von (14a) mit $x = 1$ nach dem gleichen Verfahren gewonnen werden kann.

Man fragt nun, für einen gerade angenommenen Wert s diese Reihe konvergiert oder nicht; und $f_k(x)$ sei die Funktion (mit dem Polo -1), die für $|x| < 1$ durch die Potenzreihe auf der rechten Seite von (14a) dargestellt wird.

1) Vgl. S. XII.

2) Vgl. S. XXVIII, wie auch S. XIII und die Anmerkung 4 daselbst.

Die auf der rechten Seite von (14) angegebenen Zahlenwerte für $f_k(1) = \varphi(-1)$ hatte EULER in den Fällen $k = 1, 2, 3, \dots, 6$ zunächst dadurch gefunden, daß er die Funktionen $f_k(x)$ wirklich bildete, z. B.

$$f_6(x) = \frac{1 - 57x + 302x^2 - 302x^3 + 57x^4 - x^5}{(1+x)^7}$$

und $x = 1$ einsetzte (I₁₆, p. 72, z. T. schon vorher *Inst. calc. diff. partis posterioris caput I Opera omnia* I₁₀, p. 217). Um aber (14) allgemein für jedes ganzzahlige $k > 0$ zu beweisen, schlug er in E 352 einen außerordentlich kühnen Weg ein: Er setzte in der Formel (2a) von S. X $f(x) = x^k$, wodurch die rechte Seite zu einer endlichen Summe ohne Restglieder wird; dann wählte er $a = 0$, $h = 1$, ließ links n unendlich werden und rechts alles weg, was von $b = a + mh$, d. h. also von m abhing; so bekam er (14) aus jener Formel (2a).

1) In den *Institutiones calculi differentialis partis posterioris caput I (Opera omnia* I₁₀, p. 217) macht EULER, nachdem er erkannt hatte, daß die rekurrenten Reihen $\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r+1} r^k x^r$ rationale für $x = 1$ endlich bleibende Funktionen darstellen, einen Beweisansatz, der zwar nicht zu dem allgemeinen Gesetze (14) führte, aber doch erlaubte, die Reihen (14) für jedes einzelne k zu summieren. Er zeigte: die Teilsummen $S_1 = 1^k$, $S_2 = 1^k - 2^k$ usw. der Reihe (14) lassen sich mittels eines gewissen Polynoms $P_k(x)$ vom Grade k so darstellen: $S_n = C_k \mp P_k(n)$, wo C_k eine Konstante ist und das obere Zeichen für gerades, das untere für ungerades n gilt. EULER schließt nun so: $n = \infty$ ist weder gerade noch ungerade, also ist S_{∞} , d. h. die Summe der unendlichen Reihe (14), gleich C_k . Der EULERSche Ansatz läßt sich leicht zu einem vollen Beweise vervollständigen: Ist $\varphi_{k+1}(x)$ das BERNOULLISCHE Polynom der Ordnung $k+1$, so ist offenbar für gerade n :

$$S_n = \varphi_{k+1}(n+1) - 2^{k+1} \varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2} + 1\right),$$

für ungerades n :

$$S_n = \varphi_{k+1}(n+1) - 2^{k+1} \varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Benutzt man zur Umformung dieser Gleichung das sogen. Multiplikationstheorem der BERNOULLISCHEN Polynome ($k > 0$)

$$\varphi_{k+1}(x) = 2^k \left(\varphi_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi_{k+1}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \right) + \frac{2^{k+1}-1}{k+1} B_{k+1},$$

so erhält man die von EULER gefundene Gleichung für S_n in der folgenden genaueren Form:

$$S_n = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} B_{k+1} \mp 2^k \left(\varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2} + 1\right) - \varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \right),$$

wo wieder das obere Zeichen für gerades, das untere für ungerades n gilt. Man erkennt leicht, daß bei der Bildung der HÜLDERSCHEN Mittel der S_n nur der erste Summand $\frac{2^{k+1}-1}{k+1} B_{k+1}$ von Bedeutung wird, woraus (14) folgt.

Die Gleichungen (13a) und (14) für die Funktionswerte $\varphi(2k)$ und die Richtigkeit der Funktionalgleichung (13) für $s = 2, 3, 4, \dots$. Dann beiden Seiten von (13) noch den Grenzübergang $s \rightarrow 1$ und findet so $1 - \frac{\pi}{2 \log 2}$, und ebenso findet er beiderseits durch den Grenzübergang $s \rightarrow 0$. Nachdem so die Richtigkeit der Gleichung (13) noch für $s = 1$ und $s = 0$ wird sie mittels der bekannten für die Gammafunktion geltenden Gleichung

$$[\lambda] [-\lambda] = \frac{\lambda \pi}{\sin \lambda \pi}$$

auf alle ganzzahligen $s (\geq 0)$ ausgedehnt.

Für $s = \frac{1}{2}$ ergibt sich die Richtigkeit von (13) sofort, da $[-\frac{1}{2}] = 1$. Fall $s = \frac{3}{2}$ aber wird von EULER durch Zahlenrechnung nachgeprüft: die sofort den Wert

$$\frac{3 + \sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}} = 0,496773 \dots;$$

für die linke Seite aber errechnet EULER einen Zahlenwert, der mit diesem 5 Stellen übereinstimmt, indem er folgendermaßen vorgeht: er definiert die divergente Reihe

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \dots,$$

berechnet die Summe der ersten 9 Glieder und den Rest mittels seiner demselben kühnen Wege, auf dem er die Gleichung (14) abgeleitet hat.

Nach der Feststellung, daß die Funktionalgleichung (13) für alle s gilt, sagt EULER, man könne an ihrer Allgemeingültigkeit nicht mehr zweifeln. Er erklärt klar darüber, daß er keinen vollen Beweis geliefert hat.

EULER betrachtet auch die Funktion

$$\begin{aligned} \psi(s) &= 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} \end{aligned}$$

und spricht die Vermutung aus, daß sie der Funktionalgleichung²⁾

$$\frac{\psi(-s+1)}{\psi(s)} = \frac{[s] 2^s}{\pi^s} \cdot \sin \frac{s\pi}{2}$$

1) Die EULERSchen Ausführungen zu einem den heutigen Anforderungen weise auszugestalten wäre eine lohnende Übungsaufgabe.

2) Diese Funktionalgleichung wurde mit der Beschränkung auf positive s von MALMSTEN wiedergefunden und bewiesen: *Specimen analyticum etc.*, Ups.

Cette conjecture renferme une expression plus simple que la précédente; donc, puisqu'elle est également certaine, il y a à espérer qu'on travaillera avec plus de succès à en chercher une démonstration parfaite, qui ne manquera pas de répandre beaucoup de lumière sur quantité d'autres recherches de cette nature.

EULERS Hoffnung, mittels der Funktionalgleichung (13) zur Summation der Reihe

$$1 - \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{3^{2k+1}} - \frac{1}{4^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \dots$$

für $k = 1, 2, 3, \dots$, d. h. also zur Ermittlung der Funktionswerte $\varphi(2k+1)$ zu gelangen erwies sich als trügerisch, da diese Funktionswerte vermöge (13) in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Er wandte zwar am Schluß der Abhandlung 352 auf diese Ausdrücke die sogenannte DE L'HOSPITALSche Regel an und gelangte zu Gleichungen wie

$$(15) \quad 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \dots = -\frac{3\pi^2}{7} (1 \log 1 - 2^2 \log 2 + 3^2 \log 3 - 4^2 \log 4 + \dots)$$

$$1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} - \dots = \frac{5\pi^4}{4 \cdot 31} (1 \log 1 - 2^4 \log 2 + 3^4 \log 3 - 4^4 \log 4 + \dots)$$

usw.,

oder (nach leichter Umformung)

$$(16a) \quad 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^2}{2} (2^2 \log 2 - 3^2 \log 3 + 4^2 \log 4 - \dots) \quad \text{usw.,}$$

doch ließen sich daraus keine weiteren Schlüsse ziehen.

integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis, Journ. f. d. reine u. angewandte Math. 3 (1849), S. 17. Im gleichen Jahre 1849 stellte auch SCHLÖMILCH mit der nämlichen Beschränkung diese Funktionalgleichung auf, um sie dann 1858 zu beweisen: *Lehrsatz, Archiv d. Math. u. Phys.* 12 (1849), S. 415; *Über eine Eigenschaft gewisser Reihen, Zeitschr. f. Math. u. Phys.* (1858), S. 130. Weder von MALMSTEN noch von SCHLÖMILCH wird EULER erwähnt. Im Jahre 1871 hat dann SCHLÖMILCH wieder unter der Voraussetzung $0 < s < 1$ die EULERSche Funktionalgleichung (13) für $\varphi(s)$, die mit der für $\xi(s)$ gleichbedeutend ist, bewiesen (offenbar ohne Kenntnis der Vorgängerschaft EULERS und RIEMANNS): *Über die Summen von Potenzen der reziproken natürlichen Zahlen, Ber. der Sächs. Ges. d. Wiss., math. Kl.*, 29 (1877), S. 106; *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* 2 (1878), S. 135. Die oft wiederholte und auf einer Verwechslung beruhende irrtümliche Behauptung, SCHLÖMILCH habe schon 1849 und 1858 die EULERSche Funktionalgleichung (13) für $\varphi(s)$ wiedergefunden und bewiesen, wurde von LANDAU in der S. XXXI Anm. 1 erwähnten Arbeit berichtigt.

Die Untersuchungen der Abhandlung 352 werden wieder aufgenommen und wiederholt in der Abhandlung 432 vom 18. Mai 1772

Exercitationes analyticae

(*Opera omnia* I₁₆, p. 131—167); insbesondere aber werden die Bemühungen um die (15), (15a) mit großem Nachdruck, aber ohne endgültigen Erfolg fortgesetzt. Die e dieser Reihen, nämlich (15a), unterwirft EULER mit dem ganzen Aufwand seiner e stehenden Rechenkunst („*calculus admodum ingeniosus*“, wie es im *Summarium* heißt) wieder neuen Umformungen, ohne das erwünschte Ziel zu erreichen. Im einzelnen k über diese sehr geistvollen vergeblichen Bemühungen nicht berichtet werden; als sei nur folgende Integraldarstellung angegeben:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{4} \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \log \sin \varphi \, d\varphi.$$

In der Abhandlung 453 vom 23. November 1773

Insignes proprietates serierum sub hoc termino generali contentarum

$$x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{\sqrt{k}} \right) (p + q\sqrt{k})^n + \frac{1}{2} \left(a - \frac{b}{\sqrt{k}} \right) (p - q\sqrt{k})^n$$

(*Opera omnia* I₁₃, p. 185—206) untersucht EULER den in der Überschrift mit x neton Ausdruck, für den er auch abkürzend $fv^n + gu^n$ oder noch kürzer $[n]$ schreiben verschiedenen Richtungen hin; wir wollen im folgenden, um Verwechslungen mit zu vermeiden, $f(n)$ schreiben. EULER beweist die Rekursionsformel

$$f(n+2) = 2pf(n+1) - rf(n),$$

wo r soviel bedeutet wie $p^2 - kq^2$, ferner Formeln wie z. B.

$$f(n+1) = pf(n) + q\sqrt{k}\overline{f(n)^2 - (ka^2 - b^2)r^n}.$$

Die weiter von ihm mitgeteilten Formeln, die $v^i + u^i$ durch p und r ausdrück

$$v^6 + u^6 = 64p^6 - 96p^4r + 36p^2r^2 - 2r^3$$

sind verwandt mit den Formeln, die $\cos n\varphi$ durch die Potenzen von $\cos \varphi$ ausdrück gehen in diese über, wenn $p = \cos \varphi$, $q = \sin \varphi$, $k = -1$ gesetzt wird. Neben der

$$x = f(n) = f \cdot v^n + g \cdot u^n$$

betrachtet EULER noch eine zweite ähnlich gebaute

$$y = \varphi(n) = \xi \cdot v^n + \eta \cdot u^n,$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{\beta}{\sqrt{k}} \right).$$

Er zeigt, daß zwischen x und y identisch die quadratische Gleichung besteht

$$(\alpha^2 k - \beta^2)x^2 - 2(\alpha \alpha k - \beta \beta)xy + (\alpha^2 k - \beta^2)y^2 + (\alpha \beta - \alpha \beta)^2 r^n = 0,$$

vergleicht sie mit der allgemeinen Gleichung

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 + Dr^n = 0,$$

für diese Lösungen x, y zu gewinnen. Die Abhandlung mündet so schließlich in der theoretiſchen, wie auch die beiden ihr benachbarten Abhandlungen 452 und 454 sich Zahlentheorie beſchäftigen.

In der Abhandlung 477 vom 4. Juli 1771

Meditationes circa singulare serierum genus

in *Opera omnia* I 16, p. 217—267) untersucht EULER die Reihen

$$\begin{aligned} s_{m,n} = 1 + \frac{1}{2^m} \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{3^m} \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) \\ + \frac{1}{4^m} \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} \right) + \dots \end{aligned} \quad (m, n \text{ ganzzahlig} > 0)$$

vergleicht sie mit den Reihen

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots \quad (n \text{ ganzzahlig} > 0),$$

in den Fällen $n = 2, 4, 6, \dots$ bekannte Werte an passenden Stellen zur Probe heranzusetzen werden.

Er zeigt zuerst, daß

$$s_{n,n} = \frac{1}{2} s_n^2 + \frac{1}{2} s_{2n}$$

daß

$$s_m s_n - s_{m+n} = \sum_{\mu, \nu > 0} \left(\frac{1}{\mu^m} \frac{1}{(\mu + \nu)^n} + \frac{1}{\mu^n} \frac{1}{(\mu + \nu)^m} \right)$$

sodann zerlegt er die auf der rechten Seite von (18) vorkommenden rationalen Funktionen von μ (bei konstant gehaltenem ν)

$$\frac{1}{\mu^m (\mu + \nu)^n}, \quad \frac{1}{\mu^n (\mu + \nu)^m}$$

in Partialbrüche; dadurch gelingt es ihm, die rechte Seite von (18) als eine Summe von

Reihen der Art (16), (17) darzustellen und eine unüberschbare Fülle zwischen solchen Reihen aufzustellen, von denen hier als Beispiele nur die Reihen $s_{m,n}$, bei denen $m + n = 6$ ist, Platz finden mögen:

$$s_{6,1} = 3s_4s_2 - \frac{1}{2}s_3^2 - \frac{7}{2}s_6,$$

$$s_{4,2} = -\frac{16}{3}s_4s_2 + s_3^2 + 9s_6,$$

$$s_{6,3} = \frac{1}{2}s_3^2 + \frac{1}{2}s_6,$$

$$s_{2,4} = \frac{19}{3}s_4s_2 - s_3^2 - 8s_6.$$

Bei der Abhandlung 489 vom 12. Juni 1777

De formulis exponentialibus replicatis

(*Opera omnia* I, 5, p. 268—297) handelt es sich um folgende Iteration: irgendeine positive, α irgendeine reelle Zahl ist, werden folgende Zahlen bildet:

$$f_1 = r^\alpha, \quad f_2 = r^{f_1}, \quad f_3 = r^{f_2}, \quad \dots, \quad f_{n+1} = r^{f_n}, \quad \dots$$

Die Frage ist: Was kann man über die Existenz eines Grenzwertes sagen? Zur Veranschaulichung wird die Kurve mit der Gleichung $y = r^x$ in Koordinaten x, y herangezogen. Da der Fall $r = 1$ bedeutungslos ist, hat man

$$\text{I. } r > 1, \quad \text{II. } r < 1$$

zu unterscheiden. Der I. Fall enthält die drei Unterfälle

$$\text{Ia) } r < e^e, \quad \text{Ib) } r = e^e = 1,44467, \quad \text{Ic) } r > e^e.$$

Im Falle Ia) hat die Gleichung $r^x = x$ zwei Lösungen x_1 und x_2 (gesprochen: die Kurve $y = r^x$ wird von der Geraden $y = x$ in zwei Punkten geschnitten); ist dann $\alpha < x_2$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = x_1$; ist aber $\alpha = x_2$, so ist $f_1 = f_2 = f_3 = \dots$, also auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = x_2$; ist endlich $\alpha > x_2$, so wird $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty$.

Im Falle Ib) hat die Gleichung $r^x = x$ die eine Lösung $x = e$ (wird von der Geraden $y = x$ berührt); ist $\alpha \leq e$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = e$; ist $\alpha > e$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty$.

Im Falle Ic) hat die Gleichung $r^x = x$ keine Lösung und es ist

$$x_1 = p^{\frac{1}{p-1}}, \quad x_2 = p^{\frac{p}{p-1}}, \quad \log r = p^{\frac{1}{p-1}} \frac{\log p}{p-1}.$$

Während also bei gegebenem r zur Bestimmung von x_1 und x_2 die Auflösung einer identen Gleichung nötig ist, kann man mittels des Parameters p , der > 1 , aber sonst beliebig anzunehmen ist, vermöge (19) x_1, x_2, r sehr einfach ausdrücken (z. B. $p = 2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$).

Im Falle II: $r < 1$ hat die Gleichung $r^x = x$ stets eine einzige Lösung ξ ; es sind dann zwei Fälle zu unterscheiden:

$$\text{II a) } r \geq e^{-e}, \quad \text{II b) } r < e^{-e}.$$

Im Falle II a) ist stets $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ vorhanden und gleich jener Zahl ξ , die der Gleichung genügt.

Im Falle II b) gibt es zwei positive Zahlen x_1 und $x_2 > x_1$ mit der Eigenschaft, daß

$$r^{x_1} = x_2, \quad r^{x_2} = x_1$$

legt man $\log r$ mittels des Parameters $p = x_2 : x_1$ auf die Form

$$\log r = p^{p-1} \frac{\log p}{1-p},$$

t

$$x_1 = p^{\frac{p}{1-p}}, \quad x_2 = p^{\frac{1}{1-p}}.$$

Die der Gleichung $r^x = \xi$ genügende Zahl ξ ist $> x_1$ und $< x_2$; falls $\alpha = \xi$, ist

h

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \xi.$$

Wer $\alpha > \xi_2$ ist, wird $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n+1} = x_2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n} = x_1$, während für $\alpha < \xi_1$ umgekehrt

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n+1} = x_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n} = x_2$ wird.

Die Abhandlung 507 vom 6. November 1777

De infinitis infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum

omnia I₁₆, p. 298—313) bringt Überlegungen, die heute jedem Mathematiker ganz bekannt sind, wie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = \infty \quad \text{für } \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = 0 \text{ usw.}$$

LEONHARD EULERI Opera omnia I₁₆. Commentationes analyticae

m

Es wird bemerkt, daß man unendlich viele immer stärker und schwächer Ordnungen des Null- und Unendlichwerdens herstellen kann. Zum Schluß wird Einfluß des Differenzierens auf die Größenordnung eines Ausdrucks hingewiesen, z. B. daß für kleine positive x der Differentialquotient von $x^\alpha \left(\log \frac{1}{x}\right)^m$ ($\alpha > 0$, m beliebig) einem relativ kleinen Fehler

$$\alpha x^{\alpha-1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^m$$

ist, daß daher auch für kleine x näherungsweise

$$\int_0^x x^\alpha \left(\log \frac{1}{x}\right)^m dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^m$$

ist.

Die kurze Abhandlung 565 vom 16. Oktober 1775

*De plurimis quantitatibus transcendentibus, quas nullo modo
per formulas integrales exprimere licet*

(*Opera omnia* I 16, p. 522—527) enthält nicht sowohl Einzelausführungen als vielmehr eine Bemerkung grundsätzlicher Art: es wird darauf hingewiesen, daß aus den rationalen Funktionen durch Integration neue Transzendenten gewonnen wurden und daß auch (einfache) Integrale wie

$$\int \sqrt{\frac{f + g x^2}{b + k x^2}} dx$$

schon zu den bekannten Funktionen gerechnet werden dürften, daß man aber auch unendliche Reihen unzählige neue Zahlen und Funktionen definieren könne. Er erwähnt Beispiele für $q = \frac{1}{2}$: die Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} q^{r^2},$$

die später in der Theorie der Thetafunktionen verwendet wurde, ferner die durch

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r - 1}$$

definierte Zahl, von der er behauptet, sie sei weder rational noch in einfacher Weise aus den bekannten Irrationalzahlen ausdrückbar. Ferner schreibt er als neue mit den bekannten Funktionen in keinem Zusammenhang stehende Transzendenten die Reihe

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{a^3+1} + \dots$$

an. Endlich bemerkt er, um die FERMATSCHE Behauptung, daß jede natürliche Zahl Summe dreier Dreieckszahlen $\frac{n(n+1)}{2}$ sei, zu beweisen, habe man nur zu zeigen, daß

Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für die dritte Potenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^n$$

alle Koeffizienten a_3, a_4, a_5, \dots von Null verschieden sind.¹⁾

Als Ausführungen zu der Aufgabe, die EULER in dieser Arbeit der Analysis gaben, nämlich Zahlen und Funktionen durch Reihen zu definieren, können die in Abschnitt noch zu besprechenden Abhandlungen wie auch die bisher schon erwähnten

So beschäftigt sich EULER in der Abhandlung 684 vom 16. Januar 1777

De radicibus aequationis infinitae

(Opera omnia I, p. 241—265) mit der Funktion

$$F(x) = 1 - \frac{x^2}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n(n+1) \cdots (n+5)} + \cdots,$$

insbesondere mit ihren Nullstellen.

Gibt man dem Parameter n der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, so erhält man bekannte Funktionen

$$\cos x \quad \text{mit den Nullstellen } \pm \frac{2n-1}{2} \pi,$$

$$\frac{\sin x}{x} \quad \text{mit den Nullstellen } \pm \nu \pi,$$

$$\frac{2(1-\cos x)}{x^2} \quad \text{mit den Nullstellen } \pm 2\nu \pi \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

Da die zuletzt genannten Nullstellen sämtlich zweifache sind, vermutet EULER den Satz

Die Nullstellen der Funktion $F(x)$ sind, falls der Parameter $n > 0$, aber ≤ 3 , sämtlich reell, für $n > 3$ aber sämtlich imaginär.

Da er diesen Satz nicht allgemein beweisen kann (er wurde erst 1926 von G. POLYA bewiesen²⁾), versucht er (wie oft in ähnlichen Fällen), ihn für gewisse Werte durch Zahlenrechnung zu überprüfen. Er bestimmt so für $n = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 4$ jedesmal näherungsweise die dem Betrage nach kleinste Nullstelle von $F(x)$, die sich im Falle $n = 4$ als imaginär, in den übrigen Fällen als reell erweist, wie erwartet.

1) Vgl. die Anmerkung I, p. 526.

2) *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*. Anno V, Nr. 2. Aprile 1926.

Zu Beginn der am 3. Februar 1777 der Petersburger Akademie vorgelesenen Abhandlung 685

Exercitatio analytica, ubi imprimis serici maxime generalis summa

(*Opera omnia* I, 6, p. 266—281) erinnert EULER daran, daß er in einer früheren Abhandlung eigentlich der Bestimmung der Bogenlänge einer Hyperbel (vgl. E 651, p. 435) auf die Reihe

$$(18) \quad \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 5}{7 \cdot 11} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7 \cdot 11 \cdot 15} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19} + \dots = \frac{1}{2}$$

gestoßen war. Er hat das Bedürfnis, diese Reihe noch von einer anderen her zu erhalten, und betrachtet daher die Funktion

$$s(x) = \frac{1}{7} x^7 + \frac{1 \cdot 5}{7 \cdot 11} x^{11} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7 \cdot 11 \cdot 15} x^{15} + \dots,$$

die für $x=1$ die linke Seite von (18) liefert. Um diese Funktion auf eine geschlossene Form zu bringen, geht er so vor, wie er es in ähnlichen Fällen häufig tat: er setzt $s(x)$ einer Differentialgleichung genügt, und durch deren Integration findet er

$$s(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2} \sqrt{1-x^4} \int_0^x \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}};$$

für $x=1$ ergibt sich dann der Wert $\frac{1}{2}$ in Übereinstimmung mit (18). Statt sich nicht mit dieser Kraftprobe, sondern betrachtet noch die allgemeine

$$(19) \quad S(x) = \frac{a}{b} x^b + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+\vartheta}{b+\vartheta} x^{b+\vartheta} + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+\vartheta}{b+2\vartheta} \cdot \frac{a+2\vartheta}{b+2\vartheta} x^{b+2\vartheta} + \dots$$

die für $a=1$, $b=7$, $\vartheta=4$, $x=1$ in (18) übergeht. Er findet wieder durch Integration der Differentialgleichung einen geschlossenen Ausdruck für $S(x)$:

$$(20) \quad S(x) = \frac{a}{n\vartheta} x^{b+\vartheta} - \frac{a(b-\vartheta)}{n\vartheta} (1-x^n)^n \int_0^x \frac{\xi^{b-\vartheta-1} d\xi}{(1-\xi^n)^n},$$

wo n zur Abkürzung für $\frac{b-a-\vartheta}{\vartheta}$ gesetzt ist. Aus (19) und (20) folgt

$$(21) \quad \begin{aligned} & \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+\vartheta}{b+\vartheta} + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+\vartheta}{b+\vartheta} \cdot \frac{a+2\vartheta}{b+2\vartheta} + \dots \\ & = \frac{a}{b-a-\vartheta}. \end{aligned}$$

EULERS Bemerkung, daß diese Reihe gelte, falls $b > a + \vartheta$, ist für positive

$$\frac{a}{\theta} \cdot \frac{a_1}{a_1 + \theta} + \frac{a}{\theta} \cdot \frac{a_1}{a_1 + \theta} \cdot \frac{a_2}{a_2 + \theta} + \frac{a}{\theta} \cdot \frac{a_1}{a_1 + \theta} \cdot \frac{a_2}{a_2 + \theta} \cdot \frac{a_3}{a_3 + \theta} + \dots$$

aus einer ganz einfachen Identität ableiten läßt; es ist nämlich¹⁾

$$\frac{a}{\theta} = \frac{a}{a_1 + \theta} + \frac{a}{a_1 + \theta} \cdot \frac{a_1}{\theta}$$

$$\frac{a}{a_1 + \theta} + \frac{a}{a_1 + \theta} \cdot \frac{a_1}{a_2 + \theta} + \frac{a}{a_1 + \theta} \cdot \frac{a_1}{a_2 + \theta} \cdot \frac{a_2}{\theta}$$

$$\frac{a}{a_1 + \theta} + \frac{a}{a_1 + \theta} \cdot \frac{a_1}{a_2 + \theta} + \dots + \frac{a}{a_1 + \theta} \cdot \frac{a_1}{a_2 + \theta} \cdot \frac{a_2}{a_3 + \theta} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n + \theta}$$

$$= \frac{a}{a_1 + \theta} \cdot \frac{a_1}{a_2 + \theta} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n + \theta} \cdot \frac{a_n}{\theta}$$

es folgt (22), wenn das Restglied

$$\frac{a}{a_1 + \theta} \cdot \frac{a_1}{a_2 + \theta} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n + \theta} \cdot \frac{a_n}{\theta}$$

gegen Null konvergiert.

Abhandlung 710 vom 3. September 1778

Specimen transformationis singularis serierum

omnia I¹⁰, p. 41—55) ist wieder eine von denen, durch die EULER als erster den
eines Weges bahnte, der später eine breite Straße mathematischer Forschung wurde:
achtet die Funktion $s(x)$, welche durch die hypergeometrische Reihe²⁾

$$s(x) = 1 + \frac{a \cdot b}{1!c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)} x^3 + \dots$$

ist. Er zeigt, daß $s(x)$ der Differentialgleichung

$$x(1-x) \frac{d^2 s}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{ds}{dx} - abs = 0$$

und daß daher auch

$$s = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c, x)$$

Ein ähnliches Beweisverfahren (angewendet auf die Reihe (21)) findet sich auch in der
ng 670 (*Opera omnia* I¹⁰, p. 125).

Der Name und die Bezeichnung finden sich zuerst bei C. F. GAUSS in der Abhandlung
ones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{a \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{a(a+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$ (*Werke*,
184). Über die andersartige Bedeutung des Wortes „series hypergeometrica“ siehe S. XL.

ist. EULER scheint die ganze Größe des Schatzes, den er aufgeschürft hatte, messen zu haben; er hat manches davon, was er selbst hätte heben können, folgern, allen voran GAUSS, überlassen.¹⁾ In der Abhandlung 710 begnügt er einem Beispiel: Das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos i\varphi d\varphi}{(1+a^2-2a\cos\varphi)^{n+1}},$$

wo $i > 0$ und $n \geq 0$ ganze Zahlen bedeuten, ist gleich

$$\frac{(1-a^2)^{2n+1}}{\pi a^i} \binom{n+i}{i} F(-n+i, -n, i+1, a^2).$$

Ersetzt man n durch $-n-1$ und benutzt (23), so gelangt man zu folgenden zwischen zwei bestimmten Integralen:

$$(24) \quad \int_0^\pi (1-2a\cos\varphi+a^2)^n \cos i\varphi d\varphi : \int_0^\pi \frac{\cos i\varphi d\varphi}{(1-2a\cos\varphi+a^2)^{n+1}} \\ = \binom{n}{i} (1-a^2)^n : \binom{-n-1}{i} (1-a^2)^{-n-1}.$$

Diese Gleichung hatte EULER schon früher auf andere Weise bewiesen (vgl. Abhandlungen 672, 673 und insbesondere 674, *Opera omnia* I₁₀, p. 141, 168, 197; Übersicht über diese Abhandlungen I₁₀, p. XIV). Auch durch dieses Beispiel (24) hat EULER eine wichtige Entdeckung vorweggenommen: Setzt man in (24) $i=0$ und $\frac{a^2+1}{a^2-1}=x$, so erhält man die später wieder von JACOBI²⁾ bewiesene Identität der beiden Integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \cos\varphi \sqrt{x^2-1})^n d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \cos\varphi \sqrt{x^2-1})^{n+1}},$$

durch deren erstes LAPLACE³⁾ das LEGENDRESche Polynom $P_n(x)$ dargestellt

1) Vgl. jedoch den Beitrag EULERS zur hypergeometrischen Funktion in E 12 (Bericht S. CI) und insbesondere die eingehende Untersuchung einer allgemeinen Gleichung, in der die der hypergeometrischen Reihe als besonderer Fall enthalten sind. Bände der *Inst. calc. int.*, cap. VIII—XI, *Opera omnia* I₁₂, p. 177—245. Der Herr Bandes L. SCHLESINGER schließt (I₁₂, p. VIII) seine Würdigung dieser großen Leistung mit den Worten: „Wir finden also schon bei EULER das Prinzip, das später GAUSS und ANDERSON fruchtbringender Weise ausgestaltet haben.“

2) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 26, 1843, S. 81, 148.

3) *Mécanique céleste*, t. 5, Livre XI, Chap. II.

er Abhandlung 736 vom 31. Mai 1779

De summatione serierum in hac forma contentarum

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^6}{36} + \dots$$

nia Ite*, p. 117—138) werden außer der in der Überschrift genannten Funktion

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{x^v}{v^2}$$

Funktionen

$$g(y) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{v+1} y^v}{v^2}$$

$$h(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^{2v-1}}{(2^v - 1)^2}$$

. Nachdem EULER schon in der Abhandlung 20 (siehe S. XIX dieses Berichts) hatte, daß

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log 2)^2$$

gemeinert er jetzt das damals zur Ableitung von (25) eingeschlagene Verfahren auf so für gewisse Werte der Veränderlichen x, y, z zu merkwürdigen Beziehungen der Funktionen $f(x), g(y), h(z)$, z. B.

$$f(a) + g(b) = \frac{\pi^2}{6} - \log a \cdot \log b \sqrt{a},$$

$a = 1$ ist; für $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ folgt hieraus wieder (25), dagegen für $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \log \frac{3}{2} \cdot \log 6.$$

und beispielsweise bewiesen, daß

$$f\left(\frac{1}{3}\right) + 2h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} (\log 3)^2$$

19

Continuatio fragmentorum ex adversariis mathematicis depromptorum

nia Ite*, p. 312--327) sind aus dem EULERSCHEN Nachlasse einige Bemerkungen (e Zusammenhange untereinander) vereinigt worden; ihr Inhalt wird im folgenden

unter den Nummern I) bis V) kurz angegeben:

$$\text{I)} \quad \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+4a} - \dots \right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \dots - 2 \int_0^1 \int_0^y \frac{dx}{1+x^a} \frac{y^{a+1}}{1+y^a} dy$$

II) Die k^{te} Potenz der Reihe

$$1 + x^a + x^{2a} + x^{3a} + x^{4a} + \dots$$

wird in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt, deren bestimmt werden.

$$\text{III)} \quad 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$= \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} (\log 2)^2.$$

$$\text{IV)} \quad 1 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{7} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots$$

$$= \frac{3\pi^2}{32}.$$

V) Die Reihe

$$- \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \dots,$$

wo die Nenner die Primzahlen > 2 sind und wo bei Primzahlen der Form $4n+1$ das Zeichen $+$ steht, wird in verschiedene Weisen in besser konvergente Reihen verwandelt. Daß die Reihe konvergiert, wird ohne weiteres angenommen. Diese Annahme ist erst viel später bewiesen worden.¹⁾

1) Siehe E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bd. 1, S. 448.

VI. UNENDLICHE PRODUKTE UND KETTENBRÜCHE¹⁾

Wir beginnen den Bericht über die Arbeiten zur Lehre von den Kettenbrüchen besten mit der am 15. Juli 1757 der Berliner und 2¹/₄ Jahre später der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung 281

Specimen algorithmi singularis

(*Opera omnia* I³, p. 31—49), welche eine vollständige Lehre von dem formalen Teil der Theorie gibt. Um einen Überblick zu bekommen, verwenden wir die moderne Matrixrechnung, welche hier dieselbe Rolle spielt, wie etwa der Infinitesimalkalkül für die Integrationen von Archimedes.

In einem Kettenbruch seien a_1, a_2, \dots, a_n die Teilnenner, während die Teilzähler sein sollen. Der k te Näherungsbruch sei $\frac{P_k}{Q_k}$. Nun seien folgenden Abkürzungen für Matrizen gewählt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = M(a), \quad \begin{pmatrix} Q_i & Q_k \\ P_i & P_k \end{pmatrix} = (i, k).$$

Dann gilt (§ 2)

$$M(a_1) M(a_2) \dots M(a_n) = (n-1, n).$$

P_n sei als Funktion von a_1, a_2, \dots, a_n mit (a_1, a_2, \dots, a_n) bezeichnet, dann wird $P_{n-1} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

Kehrt man die Reihenfolge der Matrizen um und transponiert man sie — was bei den M nichts ändert —, so ist das Produkt gleich dem transponierten des vorigen. Hierbei bleibt P_n ungeändert, wodurch sich ergibt, daß das Klammersymbol seinen Wert nicht ändert, wenn die Reihenfolge der Variablen umgekehrt wird (§ 9), ferner wird

$$Q_n = (a_2, a_3, \dots, a_n).$$

Da die Determinante von $(n-1, n)$ gleich $(-1)^n$ ist, so wird auch die zu $(n-1, n)$ inverse Matrix sich durch dieselben Klammersymbole darstellen lassen. In § 20 werden

1) Der VI. Abschnitt dieser Übersicht ist von A. SPEISER verfaßt.

Determinanten von $(n-1, n)$ festgestellt. Nun ersetze man im Produkt der $M(a_{k+2})M(a_{k+3}) \dots M(a_n)$ die erste Spalte durch 1,0 und bezeichne die so entstehende Matrix mit N , dann gilt die Gleichung $(k, k+1)N = (k, n)$. Vergleicht man die Determinanten, so erhält man die Formeln der Paragraphen 25–27.

Die allgemeinste Formel, die EULER in § 31 erhält, kann so gewonnen werden. Sei $i < k < n$. Ferner sei gesetzt:

$$M(a_1)M(a_2) \dots M(a_i) = N,$$

$$M(a_1) \dots M(a_n) = M,$$

$$M(a_{k+1})M(a_{k+2}) \dots M(a_n) = L.$$

In der zu N inversen Matrix ersetze man die zweite Zeile durch 0,1, ebenso in der zu M inversen die erste Spalte durch 1,0 und bezeichne die so entstehenden Matrizen mit N' und L' . Berechnet man nun sorgfältig die Matrix $N'ML'$ und ihre Determinante, so erhält man die allgemeinste Formel dieses Paragraphen.

§ 32 ist das Assoziativgesetz der Matrixmultiplikation. In § 34 wird die Determinante zweier beliebiger Näherungsbrüche berechnet mit Hilfe der obigen Formel für die Determinante, der sich so ergebenden Determinante.

Im Anschluß an diese Abhandlung ist 323 (Is, p. 73) zu erwähnen. Die AUFWANDSsche Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ wird dort so erbracht, daß auf \sqrt{d} und 1 der EUKLIDISCHE Algorithmus angewendet und der zugehörige Kettenbruch aufgestellt wird. Es geht sich um den Nachweis, daß unter den Resten, die beim EUKLIDISCHEN Algorithmus auftreten, eine Zahl auftritt, deren Norm gleich 1 ist. Hierzu werden die Formeln von 323 verwendet. Der Nachweis des Satzes wird nicht vollständig geführt, indem der Beweis fehlt, daß in der Periode des Kettenbruches die dort mit $2v$ bezeichnete Zahl auftritt. Schließlich sei noch die Abhandlung 454 (Is, p. 310) erwähnt, wo die Formel von 323 verallgemeinert wird.

Die Abhandlung 71 vom 7. März 1737

De fractionibus continuis dissertatio

(Opera omnia I, p. 187–215) ist zeitlich die erste, welche EULER über Kettenbrüche geschrieben hat. Er berichtet zunächst über die Vorgeschichte, vor allem über die Arbeiten von BROUNCKER und WALLIS. Dann gibt er für den allgemeinen Kettenbruch das Bildungsgesetz der Näherungsbrüche. In der obigen Bezeichnungsweise hat man, wenn a der Zähler über b ist, die Matrix $M(b)$ durch

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

zu ersetzen. Die erhaltenen Resultate werden auf verschiedene Zahlen angewendet, insbesondere solche, die mit e in Verbindung stehen. Dies gibt Anlaß zur Verkürzung eines Kettenbruches mit den Teilnehmern $a, m, n, b, m, n, c, m, n, \dots$. Will man allgemein einen Kettenbruch K' bilden, bei dem der i^{te} , k^{te} und l^{te} Näherungsbruch eines anderen Kettenbruches zu aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen werden, so hat man so vorzugehen: man muß die Matrix X suchen, welche der Gleichung genügt

$$(i, k) X = (k, l).$$

Daß die erste Spalte von X die Gestalt $0, 1$ hat, folgt schon aus der Natur der Gleichung. Aber der Übergang von (i, k) zu (k, l) kann nach früher durch folgende Stufen bewerkstelligt werden: $(i, k) \rightarrow (i, i+1) \rightarrow (k, k+1) \rightarrow (k, l)$. Macht man das für den soeben angegebenen Kettenbruch mit den Teilnehmern a, m, n, \dots und behält man nur die Näherungsbrüche bei, deren Nummer durch drei teilbar ist, so erhält man ohne Schwierigkeit einen Kettenbruch, dessen Teilzähler sogar wieder 1 sind. Er ist mit Ausnahme des ersten Termes in m und n symmetrisch (§ 23 und 24).

In § 28 wird zunächst ohne Beweis die Lösung der RICCATISCHEN Gleichung

$$ay' + y^2 = x^{\frac{-4n}{3n+1}}$$

mit Hilfe eines Kettenbruches angegeben — eines der ersten Resultate EULERS in diesem Gebiet. Führt man jedoch statt x die dort angegebene Variable p und statt y den Ausdruck im letzten Teilnenner ein, der mit z bezeichnet sei, so ergibt sich die Gleichung

$$az' = 1 + \frac{2na}{p}z - z^2.$$

Bezeichnet man ferner mit z^* eine Lösung dieser Gleichung mit $n-1$ statt n , so findet man sofort

$$z^* = \frac{(2n-1)a}{p} + \frac{1}{z},$$

woraus sich die Kettenbruchentwicklung unmittelbar ergibt.

In § 31—35 wird ein verwandter Kettenbruch aufgestellt und aus seinem Bildungsgesetz seine Beziehung zur RICCATISCHEN Differentialgleichung hergestellt.

Die Abhandlung 247 (vgl. S. LXXVI dieses Berichts)

De seriebus divergentibus

enthält eine wichtige Umwandlung einer Potenzreihe in einen Kettenbruch, die man allgemein folgendermaßen angeben kann: Es seien P und Q zwei Potenzreihen, deren kon-

stante Glieder beidemal = 1 seien, ferner möge die Entwicklung von beginnen. Jetzt setze man

$$P = Q + axR \quad \text{und fahre fort}$$

$$Q = R + bxS.$$

Schreibt man die erste Gleichung in der Gestalt $\frac{P}{Q} = 1 + \frac{ax}{\frac{Q}{R}}$, so

mittelbar eine Kettenbruchentwicklung. Sie hat eine außerordentliche konvergente Kraft, und mit ihr gelingt es EULER, der Reihe $\sum (-1)^n n! x^n$ eine Funktion zuzuordnen. Er wählt für P diese Reihe und für Q die Funktion 1.

Die Abhandlung 122 vom 12. Januar 1739

De productis ex infinitis factoribus ortis

(*Opera omnia* I₁₄, p. 260—290) gehört in das Gebiet der Betafunktionen und hat einen Zusammenhang zu 254 (I₇, p. 233). Da in der Vorrede zu I₁₄, p. XLVIII (1739) wird, so sei hier auf ein Referat verzichtet. Man wird auch für die folgenden Abhandlungen mit Vorteil jene Übersicht zu Hilfe nehmen.

Aus EULERS Bemühungen, die Methoden von BROUNCKER wiederzufinden, sind eine Reihe von Abhandlungen entstanden. Die Nummer 123 (der Petersburger Akademie am 17. März 1739 vorgelegt)

De fractionibus continuis observationes

(*Opera omnia* I₁₄, p. 291—349) beginnt mit der Umwandlung von Reihen in Kettenbrüche und umgekehrt, wobei aber die Teilsummen den Näherungsbrüchen gleich gesetzt werden, was zur vorher genannten Transformation führt. Indem gewisse Integrale entwickelt werden, gewinnt EULER Kettenbruchentwicklungen. In § 15 wendet er den WALLISschen Kettenbruch an und zeigt, daß er einem unendlichen Produkt gleich ist. Der Wert als Quotient zweier Integrale schon in der Abhandlung 122 erkannt, führt er hier die Interpolation von Reihen heran. Hier handelt es sich um folgendes Problem: Gegeben ist eine Funktion $a(x)$ und gesucht eine Funktion $f(x)$, welche folgender Bedingung genügt:

$$f(x)f(x+1) = a(x) \quad \text{für } x = 1, 2, 3, \dots$$

Setzt man voraus, daß sowohl $a(x)$ als $f(x)$ mit wachsendem x nach 1 streben,

$$f(1) = \frac{a(1)a(3) \dots}{a(2)a(4) \dots}$$

Kennt man einen andern Ausdruck für das Wachsen von $f(x)$, etwa $b + c/x$, oder allgemein $b(x)$, so setze man $f(x) = b(x) + g(x)$, wo nun $g(x)$ gesucht

man hier x durch $x + 1$ und multipliziert, so findet man

$$g(x) = A(x) + \frac{B(x)}{C(x) + g(x+1)},$$

wo A , B und C bekannte Funktionen sind. Dieser Ausdruck führt, wenn man ihn fortsetzt unmittelbar auf einen Kettenbruch. Dies scheint EULER der wahre Weg gewesen zu sein, auf dem BROUNCKER zu seinem Ausdruck geführt wurde. Aber die Kettenbrüche, auf die so geführt wird (§ 21—36), weichen noch zu sehr davon ab, und so gibt er (§ 37—48) die Überlegung noch eine neue Wendung, indem er eine Tafel mit doppeltem Eingang verwendet. Hier sei auf eine Besprechung verzichtet, weil die Methode bei der Abhandlung 55 ausführlich zur Darstellung kommt.

Von § 49 ab wird eine direkte Methode zur Bildung von Kettenbrüchen verwendet, die auch in anderen Abhandlungen vorkommt. Besteht in einer unendlichen Folge von Größen zwischen je drei aufeinanderfolgenden Termen eine lineare homogene Beziehung mit beliebigen veränderlichen Koeffizienten, so ergibt sich unmittelbar eine Kettenbruchentwicklung für den Quotienten der beiden ersten Terme. EULER geht nun von den Koeffizienten aus und nimmt sie als lineare Funktionen ihrer Nummer an (§ 49). Er sucht jetzt die Terme der Folge in Gestalt von Integralen zu gewinnen (§ 52—55) und erhält für einen Kettenbruch, der schon in § 34 summiert war, einen neuen Ausdruck, dessen Übereinstimmung mit dem vorigen in § 56—59 nachgewiesen wird. Hierauf gelangt er in das Gebiet der hypergeometrischen Funktion und gewinnt für den Quotienten benachbarter Funktionen Kettenbruchentwicklungen. Gleichzeitig findet er weitere Relationen. Beispielsweise sei in § 65 die moderne GAUSSISCHE Bezeichnungsweise eingeführt. Setzt man

$$p = 1, \quad q = -z, \quad \frac{a-b}{r} + 1 = \alpha, \quad \frac{c}{r} + 1 = \beta, \quad \frac{a}{r} + 1 = \gamma,$$

so wird die zweite Formel auf p. 338 zu folgender:

$$\frac{F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma; z)}{F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha - 1, \gamma - 1; z)} = \frac{F(\alpha, \beta, \gamma; z)}{F(\alpha, \beta - 1, \gamma - 1; z)}.$$

Daß schon die beiden Zähler im wesentlichen übereinstimmen, hat EULER erst in 71 (1c*, p. 43) nachgewiesen; vgl. S. XCIII.

Wenn EULER gleich darauf $b = c + r$ setzt, so handelt er gegen die Vorschriften der vorigen Seite, und das Integral am Schluß des § 65 wird in einen Pol erstreckt. Aber die Formel ist insofern richtig, als sie auf den Fall $\beta = \gamma$ führt und daher i

der Tat $m(=\beta)$ herausfällt. Von § 75 ab zieht EULER die RICCATISCHE Gleichung heran.

Der Methode der Rekursionsformel ist die am 4. September 1755 der Akademie vorgelegte Abhandlung 522 gewidmet.

De formatione fractionum continuarum

(*Opera omnia* I₁₅, p. 314—337). Der Ausdruck $x(a + bx + cx^2)$ verschwindet, wenn x gleich 0 oder gleich einer Wurzel α des quadratischen Faktors setzt. Man setzt $x = \alpha + z$, so erhält man drei Terme. Integriert man wieder von $z = 0$ bis $z = \alpha$, erhält man drei Integrale, deren Summe gleich 0 ist. Die Kettenbrüche, die man erhält, geben bei geschickter Wahl der Anfangsfunktion Berechnungen bestimmter Funktionen, die zu den „*quantitates maximae transcendentes*“ gehören. Der Fall von § 29 wird in der Abhandlung 606 (I₁₅, p. 244) für $\theta = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ durchgeführt und an mehreren Beispielen illustriert.

Den Übergang von § 37—48 der Abhandlung 123 zu den weittragenden Überlegungen von § 553 bildet § 550 (vom 4. Juli 1771)

De seriebus, in quibus producta ex binis terminis contiguis datam constituunt progressionem

(*Opera omnia* I₁₅, p. 383—399). Nach einigen vorläufigen Untersuchungen, die in der Abhandlung 122, also der Produktentwicklungen von Betafunktionen gehören, stellt sich folgendes Problem:

Es soll $f(x)$ aus der Gleichung $f(x)f(x+1) = p + xq$ ($x = 1, 2, \dots$) bestimmt werden. Um von hier zu einem Kettenbruch zu gelangen, müßte man für $f(x)$ einen passenden Ansatz $g(x)$ machen, aber da $g(x)g(x+1)$ bloß linear in x sein darf, so läßt sich kein einfacher Ausdruck finden. EULER quadriert nun die Gleichung und bekommt rechts einen in x quadratischen Ausdruck, so daß also $f^2(x)$ sich sehr leicht als einen linearen Ausdruck annähern läßt, der natürlich sich von $p + qx$ nur um eine konstante Differenz scheidet. Diese Methode wird an einem etwas allgemeineren Fall in § 16—28 angewendet und alsdann auf das spezielle Problem angewendet. EULER erhält so auf diese Weise Kettenbrüche für Quotienten der Betafunktionen.

Die Abhandlung 553 (vom 18. Mai 1772)

Observationes analyticae

(*Opera omnia* I₁₅, p. 400—434) befaßt sich mit folgendem Problem aus der Theorie der hypergeometrischen Funktionen: Es ist eine Funktion zweier Veränderlichen gegeben, welche bei Vermehrung der Argumente um ganze Zahlen eine linear gebrochene Funktion erfährt.

Der genaue Ansatz ist folgender:

$$f(x, y) = A(x, y) + \frac{P(y)}{f(c, y+1)}$$

$$f(x, y) = B(x, y) + \frac{Q(x)}{C(x, y) + f(x+1, y)}$$

Hierbei setzt EULER A , B und C als lineare Funktionen, P und Q als quadratische an. Die Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander, und EULER zeigt in § 7—9, daß man zwischen den Koeffizienten der ersten Gleichung eine Relation annehmen muß, und daß hierauf die Koeffizienten der zweiten Gleichung völlig bestimmt sind. Diese Beziehungen ergeben sich als Vertauschungsrelationen von Matrizen, indem man den Übergang von $f(x, y)$ zu $f(x+1, y+1)$ auf zwei Wegen herstellen kann.

Jede der beiden obigen Gleichungen gestattet eine Kettenbruchdarstellung von $f(x, y)$, indem man die eine Variable festhält und die andere um ganze Zahlen vermehrt (§ 11). Die Funktionen, die man so erhält, sind hypergeometrische Funktionen. Man kann das Verfahren auch umkehren und ganze Zahlen subtrahieren. Auf diese Weise gewinnt man (§ 17) wieder Kettenbrüche für $f(x, y)$ und damit Funktionalgleichungen. So liefern die beiden Kettenbrüche eine Beziehung zwischen Funktionen mit vertauschten x und y , und zwar mit Vertauschung der dortigen Variablen und Koeffizienten:

$$p(A, B, C, D, E, F, m, n) = p(A, B, C, D, u, v, n, m) + \frac{1}{2}(A+B)(m-n) + \frac{1}{2}(G-C)$$

Sie ist in der Tat eine Involution.

EULER fordert einen direkten Beweis dieser Relationen. Die Arbeit behandelt in übrigen eine große Zahl von speziellen Fällen.

Einen mehr elementaren Charakter weist 593 (vom 18. September 1775)

De transformatione serierum in fractiones continuas

(*Opera omnia* I₁₆, p. 661—700) an. Sie geht inhaltlich mit dem 18. Kapitel der *introduction in analysin infinitorum* (I₈, p. 362 ff.) parallel. Die gegenseitige Umwandlung von Kettenbrüchen und Reihen, wobei Näherungsbrüche und Teilsummen einander zugeordnet sind, und daher Konvergenzfragen nicht berührt werden, wird ausführlich auseinandergesetzt und an vielen Beispielen erläutert. Insbesondere wird in § 19 der BROUCCHERSche Kettenbruch aus der LEIBNIZschen Reihe hergeleitet.

Die kurze Abhandlung 616 (vom 11. Januar 1776)

De transformatione seriei divergentis etc.

(*Opera omnia* I₁₆, p. 34—46) ist, wie im *Summarium* schon bemerkt wird, eine Wieder-

holung gewisser Überlegungen von 247 (II, p. 585), über welche oben ist. Immerhin sei auf die auch im *Summarium* hervorgehobene Verkürzbruchs in § 9 auf die Hälfte der Terme aufmerksam gemacht. Am Schgekehrt wie in 593 — der BROUNCKERsche Kettenbruch in die LEIBNIZgewandelt.

Die am 18. November 1779 vorgelegte Abhandlung 742

Observationes circa fractiones continuas etc.

(*Opera omnia* I^o, p. 139—161) behandelt unter Anwendung immer kräftdie Summierung der Kettenbrüche mit den Teilnehmern 1, 2, 3, ... und $n, n+1, n+2, \dots$ für ganzzahlige Werte von n . Zunächst werden mSchranken die Werte für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 aufgesucht. Dann wird (§beliebiges n dadurch bestimmt, daß der Kettenbruch nach oben zu förtgesTeilzähler = 0 entsteht, worauf durch Nullsetzen des Nenners ein endlicentsteht mit der gesuchten Summe als letztem Term. Die Umkehrung desseendlichen Kettenbruch für diese Summe (§ 21). Aus den gefundenen Weersten Fälle stellt EULER eine Rekursionsformel auf (§ 21). Diese wird (§ 23—28) durch Zuhilfenahme einer Formel aus der Reihenlehre (§ 24,genannte Formel findet man z. B. in den *Institutiones calculi differentialis*. (I^o, p. 52) abgeleitet.

In engstem Zusammenhange mit der Abhandlung 123 und insbesoParagraphe 37—48 steht die Nummer 745 (vom 7. Februar 1780)

De fractionibus continuis WALLISII

(*Opera omnia* I^o, p. 178—199). Nach einem kurzen Bericht über dieWALLIS stellt EULER das Problem, die Funktion $f(x)$ zu finden, welchgenügt

$$f(x)f(x+1) = (b+ax)^2 + c \quad \text{für } x = 0, 1, 2, \dots,$$

und zwar zunächst für den Fall $c = 0$. Er wendet zur Kettenbruchentw.mit doppeltem Eingang an, die in der Besprechung zu 553 auseinandergesodurch Spezialisierung die Kettenbrüche von WALLIS (§ 12), dann gibt erwicklung (§ 15) und die Darstellung durch Integrale (§ 16). Hierauf geht er zProblem über und behandelt es in derselben Weise. Der Kettenbruch in §jenigen von § 47 der Abhandlung 553 über, wenn man $2f - a = s, a - 2b$ setzt. Wird c als eine positive Zahl angenommen, so werden die Teilzäbruchs quadratische Ausdrücke der Nummer mit imaginären Wurzeln. Entdie unendlichen Produkte imaginäre Faktoren enthalten und die Integrale

größen. EULER zeigt, wie man zu reellen Ausdrücken gelangen kann und hierbei Integrale von der Gestalt

$$\int_0^1 \frac{x^{t-1} \cos(b \log x) dx}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

geführt wird. Er gibt zum Schlusse einen expliziten Ausdruck für solche Integrale bei Lösung des Nenners.

In 750 (vom 20. März 1780)

Commentatio in fractionem continuam, qua illustris LA GRANGE potestates binomiales exp

(*Opera omnia* I 6*, p. 232--240) macht EULER einige Bemerkungen zu einem Kettenbruch für $(1+x)^n$, den LA GRANGE aufgestellt hatte und der die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt, daß er für positive und negative ganzzahlige n endlich ist. Durch einige Transformationen findet EULER einen Ausdruck, der nur n^2 enthält, und er entwickelt, teilweise über den Übergang zu komplexen Werten, u. a. $\arctg t$ und $\lg t$ in Kettenbrüche.

VII. BERECHNUNGEN DER ZAHL π

EULER hat sich zu den verschiedensten Zeiten seines Lebens mit dieser Beschäftigung beschäftigt: Wie berechnet man die Zahl π mit vorgeschriebener Genauigkeit? Welche Wege? Schon seine erste Arbeit über diesen Gegenstand, nämlich die vom 20. Februar 1738

De variis modi circuli quadraturam numeris proxime exprime

(*Opera omnia* 114, p. 245—259) enthält mehrere der später von ihm verwandten Verfahren. Nachdem er kurz den Gedankengang des Archimedes und die von MACHIN (100 Stellen mittels der Formel $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$) und erwähnt hat, formt er den Rest der Reihe

$$(1) \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

mittels seiner Summenformel um und leitet dann mittels des Additionstheorems der tangens-Funktion

$$(2) \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

Formeln ab wie diese¹⁾

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70} + \operatorname{arctg} \frac{1}{99}.$$

Durch unbeschränkt wiederholte Anwendung der Formel (2) werden weitere gefunden wie

1) Für $\frac{\pi}{4}$ gebraucht er in dieser Arbeit den Buchstaben α ; für Arcus tangens die Abkürzung At, in späteren Abhandlungen Atang (z. B. 280, 116, S. 17) und 809, 116*, S. 259). In der zweiten obiger Formeln (3) findet sich *Opera omnia* der rechten Seite infolge eines Druckfehlers At $\frac{1}{34}$ statt At $\frac{1}{31}$.

$$(3) \quad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + \operatorname{arctg} \frac{1}{32} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{13} + \operatorname{arctg} \frac{1}{21} + \operatorname{arctg} \frac{1}{31} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} + \cdots$$

Auch Formeln der folgenden Art:

$$(4) \quad \operatorname{arctg} \frac{p}{p^2 - 1} = \frac{1}{p} + \frac{2}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} + \frac{1}{7p^7} + \frac{2}{9p^9} + \frac{1}{11p^{11}} + \cdots$$

$$(5) \quad \operatorname{arctg} \frac{2p}{2p^2 - 1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3 \cdot 2p^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^3 p^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^5 p^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^7 p^9} + \cdots$$

$$(6) \quad \operatorname{arctg} \frac{3p(p^2 - 1)}{p^4 - 4p^2 + 1} = \frac{3}{p} + \frac{3}{5p^5} + \frac{3}{7p^7} + \frac{3}{11p^{11}} + \frac{3}{13p^{13}} + \cdots$$

werden mitgeteilt; sie sind leicht zu bestätigen, indem man beide Seiten nach $x = \frac{1}{p}$ renziert, wobei die rechten Seiten in Summen von geometrischen Reihen übergehen. EULER zu diesen Reihen gelangt ist, wird nicht ersichtlich. Ihre Verwendungsmöglichkeit er durch Beispiele an; so liefert (6) für $p = 2$ den Wert $\operatorname{arctg} 18$; addiert man $\operatorname{arctg} \frac{1}{18}$ so erhält man nach (2) $\frac{\pi}{2}$. Zum Schlusse wird in nur losem Zusammenhang dem Vorhergehenden mit Benutzung der Formeln

$$\frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2}} = 2 \sin \frac{x}{2}, \quad \frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4}} = 4 \sin \frac{x}{4}, \quad \frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8}} = 8 \sin \frac{x}{8}, \quad \dots$$

die Gleichung

$$(7) \quad \frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cos \frac{x}{16} \cdots$$

abgeleitet und durch eine kurze Näherungsrechnung mittels der Logarithmentafel bestätigt.

Eine unendliche Menge von Formeln, die alle als Verallgemeinerungen der Formeln anzusehen sind, gibt EULER in der Abhandlung 280

De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt

(Opera omnia I₁₆, p. 16--30), die am 23. November 1758 in der Berliner Akademie gelesen, dann aber am 15. Oktober 1759 der Petersburger Akademie vorgelegt worden

Die in ihr mitgeteilten Formeln beruhen alle auf der Identität

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_n &= (\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2) + (\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_3) \\ (8) \quad &+ (\operatorname{arctg} x_3 - \operatorname{arctg} x_4) + \dots + (\operatorname{arctg} x_{n-1} - \operatorname{arctg} x_n) \\ &= \operatorname{arctg} \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} + \operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_3}{1 + x_2 x_3} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{x_{n-1} - x_n}{1 + x_{n-1} x_n} \end{aligned}$$

und der sich aus ihr im Falle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ergebenden unendlichen Reihe für $\operatorname{arctg} \frac{1}{18}$ bringt sehr viele Beispiele, in denen er $x_r = \frac{1}{a + (r-1)b}$ setzt ($r = 1, 2, 3, \dots$), er beispielsweise, indem er weiter $a = 7$, $b = 25$ wählt, die Reihe

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{18} = \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{25r^2 + 11r + 5}$$

Umgekehrt bemerkt er: Wenn

$$M^2 + 1 = L^2 + \dots + L \cdot N$$

ist, so läßt sich die Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{Lr^2 + Mr + N}$$

summieren, und ihre Summe ist $\operatorname{arctg} \frac{2}{L+M}$. Zu verhältnismäßig einfacher Form (8) gelangt EULER auch, indem er für x_1, x_2, x_3, \dots die Näherungsbrüche $\frac{a+b+1}{b}, \dots$ des Kettenbruchs

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}}$$

wählt. Schließlich zeigt er, daß umgekehrt aus

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{z} = \operatorname{arctg} \frac{1}{y_1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{y_2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y_3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{y_4} + \dots$$

folgt

$$z = y_1 + \frac{y_1^2 + 1}{-y_1 + y_2 + \frac{y_2^2 + 1}{-y_2 + y_3 + \frac{y_3^2 + 1}{-y_3 + y_4 + \dots}}}$$

Obwohl in dieser Abhandlung 280 von der Berechnung der Zahl π nirgends die Rede ist, wurde sie doch in die VII. Gruppe aufgenommen; denn sie knüpft unmittelbar an die zuvor besprochene Abhandlung 74 an.

$$(9) \quad \operatorname{arctg} \frac{x}{2-x} = \int_0^x \frac{dt}{2-t+t^2} = 2 \int_0^x \frac{dt}{t^2+4} + 2 \int_0^x \frac{t dt}{t^2+4} + \int_0^x \frac{t^2 dt}{t^2+4}$$

$$= \frac{x}{2} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^v}{4^{v+1}} \left(\frac{x^4}{4}\right)^v + x^2 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^v}{2^{v+1}} \left(\frac{x^4}{4}\right)^v + x^3 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^v}{4^{v+3}} \left(\frac{x^4}{4}\right)^v.$$

Die rechte Seite ist für $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{4}$ leicht mit einiger Genauigkeit zu berechnen und liefert dann die Werte $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ und $\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$, aus denen sich π vermöge der Gleichung

$$\pi = 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$$

ergibt. Dieses Berechnungsverfahren bildet den Inhalt der Abhandlung 706 vom 17. Juni 1771.

De novo genere serierum rationalium et valde convergentium, quibus ratio peripheriae ad diametrum exprimi potest

(*Opera omnia* I 16*, p. 21–27).

Zehn Tage vorher hatte EULER der Petersburger Akademie die Abhandlung 705 vorgelegt.

Investigatio quarundam serierum, quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum vero proxime definiendam maxime sunt accommodatae

(*Opera omnia* I 16*, p. 1–20). In ihr wird zur Berechnung von π ein in den bisher besprochenen Arbeiten nicht vorkommendes, sehr brauchbares Hilfsmittel benutzt, nämlich die Reihe¹⁾

$$(10) \quad \operatorname{arctg} t = \frac{t}{1+t^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right)^3 + \cdots \right).$$

1) Aus Gleichung (68) S. XXXVI ergibt sich durch Differentiation

$$\operatorname{arcsin} x = x \sqrt{1-x^2} \left(1 + \frac{2}{3} x^2 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} x^4 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^6 + \cdots \right),$$

und hiernus folgt (10) durch die Substitution

$$\operatorname{arcsin} x = \operatorname{arctg} t, \quad \text{also} \quad x^2 = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad x \sqrt{1-x^2} = \frac{t}{1+t^2}.$$

Die Reihe (10) findet sich zuerst bei JOHANN BERNOULLI: *Opera omnia* t. 4, *Lausannae et Genevae* 1742, p. 24. Sie wurde schon vor EULER in Verbindung mit Formeln wie (11), (12) zur Berechnung von π herangezogen durch CHARLES HUTTON: *Philosophical Transactions*, Bd. 66, 1776 S. 476–492.

EULER beweist sie auf mehrere Weisen und benutzt sie im Zusammenhangssätzen wie

$$(11) \quad \pi = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{3},$$

$$(12) \quad \pi = 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{7},$$

$$(13) \quad \pi = 20 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{79}$$

zur Berechnung von π . Insbesondere liefert (13) den Ansatz, der wohl geeignetste ist, um den Dezimalbruch für π zu finden:

$$\pi = \frac{28}{10} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{2}{100} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{2}{100} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{2}{100} \right)^3 + \dots \right] \\ + \frac{30336}{100000} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{141}{100000} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{141}{100000} \right)^2 + \dots \right].$$

In der im ersten Bande der *Opera postuma* erschienenen Abhandlung

Series maxime idoneae pro circuli quadratura proxime inventae

(*Opera omnia* I₁₆, p. 267—283), die sonst im wesentlichen nur eine Wiederholung der oben besprochenen Abhandlung 705 ist, berechnet EULER mit dieser Formel π auf 100000 Stellen, wozu er, wie er mitteilt, nur ungefähr eine Stunde gebraucht hat.

Es bleiben noch zwei Arbeiten EULERS zu besprechen, in denen zur Berechnung von π Wege eingeschlagen werden, die untereinander und von den in den bisher besprochenen Arbeiten eingeschlagenen ganz verschieden sind; es sind dies die Abhandlungen 706 und 707.
23. März 1739

Consideratio progressionis cuiusdam ad circuli quadraturam inventae

(*Opera omnia* I₁₄, p. 350—363) und die Abhandlung 275

Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantes

die am 20. Juli 1758 der Berliner und am 15. Oktober 1759 der Petersburger Akademie vorgelegt worden ist (*Opera omnia* I₁₅, p. 1—15). In der letzteren beweist EULER die Richtigkeit einer Folge von Konstruktionen des DESCARTES, die mit immer größerer Genauigkeit einen beliebig großen Durchmesser des Kreises liefern, dessen Fläche dem eines gegebenen Quadrats ist.

EULER zeigt, daß die Reihe

$$\tan \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \tan \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} \tan \frac{\pi}{32} + \dots = \frac{4}{\pi}$$

Die Abhandlung 125 beginnt mit der Berechnung des Integrals

$$\operatorname{arctg} t = \int_0^t \frac{d\tau}{1 + \tau^2};$$

die Strecke $0 \dots t$ wird in n gleiche Teile geteilt und $\operatorname{arctg} t$ näherungsweise durch die Rechteckformel

$$\frac{nt}{n^2 + t^2} + \frac{nt}{n^2 + 4t^2} + \frac{nt}{n^2 + 9t^2} + \dots + \frac{nt}{n^2 + n^2 t^2} = s$$

berechnet; dann wird die Differenz $\operatorname{arctg} t - s$ mittels der EULERSchen Summenformel abgeschätzt und schließlich $t = 1$ gesetzt, wodurch sich folgende Formel für $\frac{\pi}{4}$ ergibt:

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{4} = & \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \frac{n}{n^2 + 9} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \\ & + \frac{1}{4n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 n^2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 6 n^4} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{2^5 \cdot 10 n^{10}} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^7 \cdot 14 n^{14}} \\ & + \frac{43867}{19 \cdot 42} \cdot \frac{1}{2^9 \cdot 18 n^{18}} - \frac{854513}{6 \cdot 23} \cdot \frac{1}{2^{11} \cdot 22 n^{22}} + \dots \end{aligned}$$

(Die Faktoren $\frac{1}{6}, \frac{1}{42}, \frac{5}{66}, \frac{7}{6}$ usw. sind die BERNOLLI'schen Zahlen B_2, B_4, B_6, B_{10} usw.)

Unter der Annahme $n = 5$ gewinnt er aus (14) π auf 12 Dezimalstellen richtig.

EULER erkennt (§ 15) sehr richtig, daß die Reihe (14) nach der heutigen Bezeichnungungsweise „halbkonvergent“ ist; er sagt, je größer n sei, um so genauer liefere sie π , doch müsse man sie an einer geeigneten Stelle abbrechen, denn sie divergiere, und zwar so sehr, daß auch die Reihe, die nach Multiplikation des ν^{ten} Gliedes mit x^ν entstehe, divergenzbleibe, wie klein auch x sei; der Quotient $|B_{2\nu+2}| : |B_{2\nu-4}|$ bleibe nämlich (für $\nu > 2$) oberhalb $\frac{(2\nu-2)(2\nu-3)}{2n^2} \cdot 1$ und $|B_{2\nu+2}| : \nu^2 |B_{2\nu}|$ sei asymptotisch gleich $\frac{1}{\pi^2}$. Daraus schließt er richtig, daß das dem Betrage nach kleinste Glied der Reihe (14) eine Nummer habe, die in der Nähe von $\frac{\pi n}{\sqrt{2}}$ liege. Mit sicherem Gefühl sagt EULER, daß man bei jenem Gliede die Summation abbrechen müsse. Eine Begründung dieses Gefühls oder die Angabe einer oberen Grenze des Fehlerbetrages durfte man von ihm und seiner Zeit nicht verlangen. Die Rest

1) Das folgt leicht aus (3) S. IX.

abschätzung, die er in § 16 versucht, entbehrt der Begründung. Ist P das mit dem kleinsten Betrage folgende, so hat zwar EULER recht, wenn Glied und die nächstfolgenden stimmen ungefähr mit den Anfangsgliedern der Reihe

$$(15) \quad P \left(1 - \frac{4\mu^4}{\pi^4 n^4} + \left(\frac{4\mu^4}{\pi^4 n^4} \right)^2 - \left(\frac{4\mu^4}{\pi^4 n^4} \right)^3 + \dots \right)$$

überein (wo μ die Anzahl der beibehaltenen Glieder, also die Nummer des k der Reihe (14) ist), aber es ist kein Grund einzusehen, warum die Summe

$$\frac{\pi^4 n^4 P}{\pi^4 n^4 + 4\mu^4}$$

der geometrischen Reihe (15) als Abschätzung des Restes hinzugefügt werden

München, im Januar 1935.

(GEOM)

INDEX

Insunt in hoc volumine indicis EMBSTROEMIANI commentationes

705, 706, 709, 710, 722, 726, 736, 742, 743, 745, 746, 747, 750, 768, 809, 810, 819

705. Investigatio quarundam serierum, quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum vero proxime definiendam maxime sunt accommodatae

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1793), 1798, p. 133—149

706. De novo genere serierum rationalium et valde convergentium, quibus ratio periphoriae ad diametrum exprimi potest

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1793), 1798, p. 150—154

709. De evolutione potestatis polynomialis cuiuscunque

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.})^n \dots\dots\dots$$

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 12 (1794), 1801, p. 47—57

710. Specimen transformationis singularis serierum

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 12 (1794), 1801, p. 58—70

722. Disquisitiones analyticae super evolutione potestatis trinomialis

$$(1 + x + xx)^n \dots\dots\dots$$

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 14 (1797/98), 1805, p. 75—110

726. Demonstratio insignis theorematis numerici circa uncias potestatum binomialium

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 15 (1799/1802), 1806, p. 33—43

736. De summatione serierum in hac forma contentarum

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^6}{36} + \text{etc.} \dots\dots\dots$$

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 3 (1809/10), 1811, p. 26

742. Observationes circa fractiones continuas in hac forma contentas

$$S = \frac{n}{1 + \frac{n+1}{2 + \frac{n+2}{3 + \frac{n+3}{4 + \text{etc.} \dots\dots\dots}}}}$$

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 4 (1811), 1813, p. 52—7

743. De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque primi potest.

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 4 (1811), 1813, p. 75—8

745. De fractionibus continuis Wallisii

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 5 (1812), 1815, p. 24—4

746. Methodus succincta summas serierum infinitarum per formulas differentiales investigandi

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 5 (1812), 1815, p. 45—5

747. De seriebus memorabilibus, quibus sinus et cosinus angulorum multiplicium exprimere licet

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 5 (1812), 1815, p. 57—7

750. Commentatio in fractionem continuam, qua illustris La Grange potestates binomiales expressit

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 6 (1813/14), 1818, p. 3—

768. De uncis potestatum binomii earumque interpolatione

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 9 (1819/20), 1824, p. 57

Series maxime idoneae pro circuli quadratura proxime invenienda. pag. 267

Opera postuma 1, 1862, p. 288—298

Enodatio insignis cuiusdam paradoxi circa multiplicationem angulorum observati 284

Opera postuma 1, 1862, p. 299—314

Continuatio fragmentorum ex adversariis mathematicis depromptorum 312

Opera postuma 1, 1862, p. 506—513

INVESTIGATIO QUARUNDAM SERIERUM QUAE AD RATIONEM PERIPHERIAE CIRCULI AD DIAMETRUM VERO PROXIME DEFINIENDAM MAXIME SUNT ACCOMMODATAE¹⁾

Conventui exhibita die 7. Iunii 1779

Commentatio 705 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1793), 1798, p. 133—149

Summarium ibidem p. 167—168

SUMMARIIUM

Tous ceux qui après VAN CEULEN²⁾ ont cherché par approximation la circonférence π d'un cercle, dont le diamètre = 1, se sont servis de la série connue de LEIBNITZ, en vertu de laquelle l'arc s d'un cercle, dont le rayon = 1, est exprimé par sa tangente t de la manière suivante:

$$s = t - \frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{6}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \text{etc.}$$

il donne pour la circonférence entière

$$\pi = \sqrt{12} \times \left(1 - \frac{1}{8 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 3^3} - \frac{1}{7 \cdot 3^5} + \frac{1}{9 \cdot 3^7} - \text{etc.}\right)$$

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 74 indicis ENESTROEMIANI, LEONHARDI EULERI *Opera omnia* vol. I14, p. 245—259 et Commentationem 809 huius voluminis.

C. B.

2) Voir la note 2 au bas de la page 3. C. B.

Feu M. EULER avoit déjà proposé¹⁾, dans le neuvième volume des anciens *Commentarii* pour l'année 1737, une méthode de diminuer ce travail énorme, en faisant usage de la division des arcs, et notamment de l'expression

$$\frac{\pi}{4} = A \operatorname{tang.} \frac{1}{2} + A \operatorname{tang.} \frac{1}{3}$$

qui donne

$$\frac{\pi}{4} = \left\{ \begin{aligned} & + \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{etc.} \end{aligned} \right\}.$$

Le travail devient encore plus léger, quand on se sert de la décomposition

$$\pi = 8 A \operatorname{tang.} \frac{1}{3} + 4 A \operatorname{tang.} \frac{1}{7};$$

les séries qui en résultent deviennent très convergentes; le seul inconvénient qui en a un peu l'avantage est la division successive par 49, qui n'est pas assez commode.

Pour remédier à cet inconvénient, M. EULER donne ici une autre expression de π par sa tangente t , savoir

$$s = \frac{t}{1+tt} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{tt}{1+tt} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 6} \left(\frac{tt}{1+tt} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 6 \cdot 7} \left(\frac{tt}{1+tt} \right)^3 + \text{etc.} \right],$$

qu'il démontre de deux manières différentes et qui, en mettant $t = \frac{1}{3}$ et puis $t = \frac{1}{7}$, donne l'expression

$$\pi = 8 A \operatorname{tg.} \frac{1}{3} + 4 A \operatorname{tg.} \frac{1}{7},$$

donne la circonférence exprimée par les deux séries suivantes:

$$\pi = \left\{ \begin{aligned} & + \frac{21}{10} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 6} \left(\frac{1}{10} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 6 \cdot 7} \left(\frac{1}{10} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\ & + \frac{29}{60} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{100} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 6} \left(\frac{2}{100} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 6 \cdot 7} \left(\frac{2}{100} \right)^3 + \text{etc.} \right] \end{aligned} \right\}$$

qui sont non seulement très convergentes, mais, de plus, d'un usage très commode et avec la facilité avec laquelle on peut déduire chaque terme de son précédent.

L'avantage devient encore plus grand, si l'on se sert de la décomposition

$$\pi = 20 A \operatorname{tang.} \frac{1}{7} + 8 A \operatorname{tang.} \frac{3}{10};$$

car elle fournit des séries encore plus convergentes et douées des mêmes avantages, relativement à la commodité du calcul. Ces séries sont:

2) Voir la note 1 au bas de la page 3. C. B.

$$\left(+ \frac{30.336}{100000} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{144}{100000} \right) + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6} \left(\frac{144}{100000} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 6 \cdot 7} \left(\frac{144}{100000} \right)^3 + \text{etc.} \right] \right)$$

dont la seconde est surtout remarquable par la propriété de donner la somme des premiers termes exactement par une fraction décimale de 26 chiffres, tous les suivans étants des zéros.

1. Qui post LUDOLPHUM A CEULEN¹⁾ veram rationem peripheriae ad diametrum proxime assignare susceperunt, usi sunt serie LEIBNITIANA¹⁾, quae per circulo, cuius radius = 1, arcus quicumque s per suam tangentem t ita exprimi solot, ut sit

$$s = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + \text{etc.},$$

quae eo magis convergit, quo minor tangens t accipiatur. Sed quia arcus ad totam peripheriam, vel ad arcum quadrantis cognitam rationem tenere debet, pro arcu s vix minorem valorem assumere licet, quam 30 graduum quippe cuius tangens est $\frac{1}{\sqrt{3}}$, quo valore in serie substituto, si semiperipheria circuli per π designetur, erit $\pi = 6s$, unde deducitur haec series

$$\pi = \sqrt{12} \times \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^3} - \frac{1}{7 \cdot 3^5} + \frac{1}{9 \cdot 3^7} - \text{etc.} \right).$$

Hinc patet calculum huius seriei ante institui non posse, quam radix quadrata ex numero 12 ad tot figuras decimales fuerit extracta, ad quot valor ipsius π desideratur, quem stupendum laborem olim ABRAHAMUS SHARP²⁾ usque ad 72 figuras decimales, tum vero Professor Greshamiensis MACHIN³⁾ ad 100 figuras est exsecutus. Multo maiorem autem laborem sollertissimus calculator Gallus DE LAGNY⁴⁾ est exantlare coactus, qui ex eadem serie valor ipsius π adeo usque ad 128 figuras decimales determinavit, qui labor certius plus quam Herculeus est censendus, cum tamen extractio radiceis ex numero 12 tantum tanquam opus praeliminare sit spectandum, istam enim immensam

1) Vide LEONHARDI EULERI Opera omnia vol. II, notam ad p. 178 adiectam. C. B.

2) Vide LEONHARDI EULERI Opera omnia vol. II, notam ad p. 249 adiectam. C. B.

3) Vide LEONHARDI EULERI Opera omnia vol. II, notam 1 ad p. 246 adiectam. C. B.

4) Vide LEONHARDI EULERI Opera omnia vol. II, notam 2 ad p. 246 adiectam. C. B.

fractionem decimalem demum opus erat continuo per 3 dividere, insuper singuli termini per numeros impares 3, 5, 7, 9, 11 etc. ordi-
debeant. Cum igitur istius seriei quilibet terminus in hac forma e-

$$\frac{+ \sqrt{12}}{(2n+1)3^n},$$

ubi n denotat numerum terminorum, tot terminos computari oportet,

$$\frac{(2n+1)3^n}{\sqrt{12}} = 10^{128},$$

sive, logarithmis vulgaribus sumendis, donec fiat

$$l(2n+1) + n l 3 - \frac{1}{2} l 12 = 128;$$

unde primam partem $l(2n+1)$ negligendo colligitur

$$n = \frac{128 + \frac{1}{2} l 12}{l 3}$$

hincque prodit terminorum numerus aliquanto minor quam 269; ex
quo maximo est mirandum quemquam fuisse reperiunt, qui hunc
laborem exsequi sit ausus.

2. Iam dudum¹⁾ autem proposui methodum istum laborem
sublevandi, postquam scilicet ostendi duos arcus satis exiguos in h
adhiberi posse, quorum quidem neuter ad peripheriam teneat ratio-
nalem, quorum tamen summa talem rationem teneat. Tales arcus

$$A \operatorname{tang.} \frac{1}{2} + A \operatorname{tang.} \frac{1}{3} = A \operatorname{tang.} 1 = \frac{\pi}{4},$$

ita ut

$$\pi = 4 A \operatorname{tang.} \frac{1}{2} + 4 A \operatorname{tang.} \frac{1}{3},$$

1) Confer Commentationis 74 indicis ENESTROEMIANI supra laudatae §§ 11 et 12.
LEONHARDI EULERI Opera omnia vol. 114, p. 262. C. B.

quorum uterque per nostram seriem facile evolvitur, cum sit

$$A \text{ tang. } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \text{etc.}$$

et

$$A \text{ tang. } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{etc.},$$

ubi termini illius seriei fere in ratione quadrupla decrescunt, huius vero in ratione fere noncupla ideoque multo magis convergunt, quam series ab Auctore memoratis usurpata. Praecipue vero notandum est hoc modo nullam extractionem radice requiri sicque fere maximam partem illius laboris evitare praeterea etiam singuli termini harum novarum serierum facillime in fractiones decimales convertuntur; quae quia figurae certum ordinem, imprimis ab initio servant, computus ad quocunque figuras sine magno labore extenditur.

3. Multo magis autem labor diminuetur, si adhuc minores arcus in subsidium vocentur. Cum enim sit

$$A \text{ tang. } \frac{1}{2} = A \text{ tang. } \frac{1}{3} + A \text{ tang. } \frac{1}{7},$$

erit nunc

$$\pi = 8 A \text{ tang. } \frac{1}{3} + 4 A \text{ tang. } \frac{1}{7},$$

sicque in serie priora termini statim in ratione noncupla decrescunt, in posteriore vero adeo 49 vicibus evadunt minores. Unicum autem, quod hic considerari posset, in hoc consistit, quod non tam facile per 49 continua divisiones instituat optandumque fuisset, ut ista divisio vel per potestatem denarii vel alius numeri simplicem ad 10 rationem tenentis expediri posset.

4. Incidi autem nuper in modum prorsus singularem, quo huic incommodo felicissimo successu occurritur atque adeo series praecedentes magis convergentes redduntur. Constat autem iste modus in idonea transformatione seriei LEIBNITIANAE, quae per sequentes operationes procedit.

$$s = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \text{etc.},$$

$$stt = t^3 - \frac{t^5}{3} + \frac{t^7}{5} - \frac{t^9}{7} + \text{etc.},$$

$$s + stt = t + \frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{3 \cdot 5} t^5 + \frac{2}{5 \cdot 7} t^7 - \text{etc.} = t +$$

ergo

$$s' = \frac{2}{3} t - \frac{2}{3 \cdot 5} t^3 + \frac{2}{5 \cdot 7} t^5 - \frac{2}{7 \cdot 9} t^7 + \text{etc.},$$

hinc

$$s'tt = \frac{2}{1 \cdot 3} t^3 - \frac{2}{3 \cdot 5} t^5 + \frac{2}{5 \cdot 7} t^7 - \text{etc.}$$

$$s' (1 + tt) = \frac{2}{3} t + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} t^3 - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} t^5 + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 9} t^7 - \text{etc.} =$$

ergo

$$s'' = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} t - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} t^3 + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 9} t^5 - \text{etc.},$$

$$s''tt = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} t^3 - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} t^5 + \text{etc.}$$

$$s'' (1 + tt) = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} t + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} t^3 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} t^5 + \text{etc.} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

$$s''' = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} t - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} t^3 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} t^5 - \text{etc.},$$

$$s'''tt = + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} t^3 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} t^5 + \text{etc.}$$

$$s''' (1 + tt) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} t + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} t^3 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} t^5 + \text{etc.}$$

etc.

5. Colligamus iam singulas substitutiones hic factas, quae sunt

$$s = \frac{t}{1+tt} + \frac{s'tt}{1+tt},$$

$$s' = \frac{2t}{3(1+tt)} + \frac{s''tt}{1+tt},$$

$$s'' = \frac{2 \cdot 4t}{3 \cdot 5(1+tt)} + \frac{s'''tt}{1+tt},$$

$$s''' = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6t}{3 \cdot 5 \cdot 7(1+tt)} + \frac{s''''tt}{1+tt}$$

etc.

Quodsi iam valores posteriores in praecedentibus substituantur, pro a sequens obtinebitur nova series

$$s = \frac{t}{1+tt} + \frac{2}{3} \cdot \frac{t^3}{(1+tt)^2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{t^5}{(1+tt)^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{t^7}{(1+tt)^4} + \text{etc.},$$

quae ad sequentem formam commodiorem reducitur

$$s = \frac{t}{1+tt} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{tt}{1+tt} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{tt}{1+tt} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{tt}{1+tt} \right)^3 + \text{etc.} \right],$$

ubi singuli termini adhuc facilius evolvuntur quam in serie praecedente propterea quod ex quolibet termino sequens immediato determinari potest. Ita ex primo termino reperitur secundus, si ille per $\frac{2}{3}$ et per $\frac{tt}{1+tt}$ multiplicetur (Multiplicatio autem per $\frac{2}{3}$ fit, dum pars tertia subtrahitur). Secundus per $\frac{4}{5} \left(\frac{tt}{1+tt} \right)$ multiplicatus dat tertium; hic vero per $\frac{6}{7} \left(\frac{tt}{1+tt} \right)$ multiplicatus dat quartum et ita porro. Facillime autem per fractiones $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$ multiplicatur. Praeterea vero haud exiguum est lucrum, quod omnes termini sunt positivi, eorumque ergo sola additio arcum quaesitum s suppledat.

6. Ad hanc autem novam seriem primum methodo longe alia sum ductus, quam hic apposuisse operae erit pretium. Cum sit

$$s = \int \frac{\partial t}{1+tt},$$

extendatur, ita ut futurum sit $s = A \tan g. a$.

7. Tum vero huius formulae denominatorem $1 + tt$ sub praesento

$$1 + aa - (aa - tt)$$

hincque porro sub hac

$$(1 + aa) \left(1 - \frac{aa - tt}{1 + aa} \right),$$

quo facto fractio $\frac{1}{1 + tt}$ evolvetur in hanc seriem

$$\frac{1}{1 + aa} \left[1 + \frac{aa - tt}{1 + aa} + \left(\frac{aa - tt}{1 + aa} \right)^2 + \left(\frac{aa - tt}{1 + aa} \right)^3 + \text{etc.} \right]$$

sicque erit

$$s = \frac{1}{1 + aa} \int \partial t \left[1 + \frac{aa - tt}{1 + aa} + \left(\frac{aa - tt}{1 + aa} \right)^2 + \text{etc.} \right],$$

postquam scilicet integratio a $t = 0$ usque ad $t = a$ fuerit statim patet pro primo termino fore

$$\int \partial t = a,$$

pro secundo autem

$$\int \partial t (aa - tt) = \frac{2}{3} a^3.$$

8. At vero, quo facilius omnes termini sequentes integrentur aequationem evolvi conveniet

$$\int \partial t (aa - tt)^{n+1} = A \int \partial t (aa - tt)^n + B t (aa - tt)^n$$

quae differentiatia ac per $\partial t (aa - tt)^n$ divisa praebet

$$aa - tt = A + B(aa - tt) - 2(n + 1) B t t,$$

ubi duplicis generis termini occurrunt, scilicet more constante tt affecti, qui seorsim se mutuo tollere debent.

involvat, quod evenit statuendo

$$A = 2(n+1)Baa,$$

quo facto, si aequatio insuper per $aa - tt$ dividatur, prodibit

$$1 = B(2n+3);$$

unde colligitur

$$B = \frac{1}{2n+3} \quad \text{hincque} \quad A = \frac{2(n+1)}{2n+3}aa$$

sicquo aequatio nostra assumpta iam erit

$$\int \partial t (aa - tt)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}aa \int \partial t (aa - tt)^n + \frac{t}{2n+3} (aa - tt)^{n+1}.$$

Quare si integralia a $t=0$ usque ad $t=a$ extendantur, postremum membrum sponte abit in nihilum sicquo habebimus hanc reductionem generalem

$$\int \partial t (aa - tt)^{n+1} = \frac{2(n+1)aa}{2n+3} \int \partial t (aa - tt)^n.$$

10. Iam opo huius reductionis ex quolibet termino nostrae seriei facilius terminus sequens assignari poterit. Quodsi enim loco exponentis successivo omnes valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc. ponamus, sequentia integralia transibimus

$$\int \partial t (aa - tt) = \frac{2}{3}a^3,$$

$$\int \partial t (aa - tt)^2 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}a^5,$$

$$\int \partial t (aa - tt)^3 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}a^7,$$

$$\int \partial t (aa - tt)^4 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}a^9$$

etc.

$$s = A \operatorname{tang.} a = \frac{1}{1+aa} \left(a + \frac{\frac{2}{3} \cdot a^3}{1+aa} + \frac{\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a^5}{(1+aa)^2} + \frac{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} a^7}{(1+aa)^3} + \text{etc.} \right)$$

unde, si loco a restituamus t , orietur ipsa series methodo praecedente, scilicet

$$s = A \operatorname{tang.} t = \frac{t}{1+tt} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{tt}{1+tt} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{tt}{1+tt} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{tt}{1+tt} \right)^3 + \text{etc.} \right]$$

12. Nunc igitur hanc novam seriem ad nostrum institutum commodemus, et quoniam supra primo hanc habuimus aequationem

$$\pi = 4 A \operatorname{tang.} \frac{1}{2} + 4 A \operatorname{tang.} \frac{1}{3},$$

pro priore parte, ubi $t = \frac{1}{2}$, obtinebimus hanc seriem

$$A \operatorname{tang.} \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{5^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{5^3} + \text{etc.} \right).$$

pro altera autem parte, ubi $t = \frac{1}{3}$, erit

$$A \operatorname{tang.} \frac{1}{3} = \frac{3}{10} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{10^3} + \text{etc.} \right);$$

consequenter valor ipsius π per binas sequentes series exprimetur

$$\pi = \left\{ \begin{aligned} & \frac{16}{10} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{10} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{2}{10} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{2}{10} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\ & + \frac{12}{10} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{1}{10} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{1}{10} \right)^3 + \text{etc.} \right] \end{aligned} \right\};$$

ipsam denarium atque hac series adeo magis convergunt.

13. Lucrum autem adhuc multo erit maius, si forma

$$\pi = 8 A \operatorname{tang.} \frac{1}{3} + 4 A \operatorname{tang.} \frac{1}{7}$$

per novam seriem evolvatur, cuius pars prior iam est evoluta; pro altera autem, ubi $t = \frac{1}{7}$, nunc habebimus

$$A \operatorname{tang.} \frac{1}{7} = \frac{7}{50} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{50} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{50^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{50^3} + \text{etc.} \right).$$

Hinc igitur nanciscemur sequentes series pro valore semiperipheriae π indagando

$$\pi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{24}{10} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{10} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{1}{10} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{1}{10} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\ + \frac{28}{50} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{100} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{2}{100} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{2}{100} \right)^3 + \text{etc.} \right] \end{array} \right\};$$

haecque duae series sunt aptissimae ad valorem ipsius π ad quocunque figurarum decimales exprimendum, propterea quod singuli termini ex praecedentibus facillime formantur atque adeo prioris seriei termini iam in ratione decupla posterioris vero in quinquies decupla decrescunt. Unde, si quis hunc valorem ad 128 figuras definire vellet, pro priora serie computare deberet terminos centum viginti octo, posterioris vero septuaginta quinque tantum.

14. Quo usus harum serierum clarius appareat, utriusque seriei octo terminos priores in fractiones decimales evolvamus; eritque

PRO PARTE PRIORE

term.	I.	= 2,4 etc.
—	II.	= - 1 6 etc.
—	III.	= - - 1 2 8 etc.
—	IV.	= - - - 1 0 9,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4
—	V.	= - - - - 9 7,5 2 3 8 0 9,5 2 3 8 0 9,5 2 3 8 0 9,5 2
—	VI.	= - - - - - 8,8 6 5 8 0 0,8 6 5 8 0 0,8 6 5 8 0 0,8 6
—	VII.	= - - - - - 8 1,8 3 8 1 6 1,8 3 8 1 6 1,8 3 8 1 6 1,
—	VIII.	= - - - - - 7 6,3 8 2 2 8 4,3 8 2 2 8 4,3 8 2 2 8
Pars	I.	= 2,5 7 4 0 0 4 4 2 7 2 3 1 4 3 5 2 3 1 4 3 5 2 3 1 4 3

PRO PARTE POSTERIORE

term.	I.	= 0,5 6 0 etc.
—	II.	= - - - 7 4 6
—	III.	= - - - - 1 1 9 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
—	IV.	= - - - - - 2 0 4 8 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
—	V.	= - - - - - 3 6 4 0 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
—	VI.	= - - - - - 6 6 1 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9
—	VII.	= - - - - - 1 2 2 2, 1 1 6 5 5 0, 1 1 6 5 5 0
—	VIII.	= - - - - - 2 2 8 1 2, 8 4 2 2 6 8, 8 4 2
Pars	II.	= 0,5 6 7 5 8 8 2 1 8 4 1 6 6 5 1 3 1 4 1 2 5 8 7 4 1 2

Hinc patet istas summas octo priorum terminorum, ob revolutiones in figuris occurrentes, sine ullo labore ad quotcunque figuras contineri.

15. Ex hoc schemate iam statim verus valor ipsius π ad o usque assignari poterit. Cum enim octo priorum terminorum sum

$$\text{partis prioris} = 2,5\ 7\ 4\ 0\ 0\ 4\ 4\ 3,$$

$$\text{partis posterioris} = 0,5\ 6\ 7\ 5\ 8\ 8\ 2\ 2.$$

$$\text{erit valor ipsius } \pi = 3,1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5,$$

ubi no in ultima quidem figura erratur. Facile autem iste calculus ad pl
figuras extendi potest, propterea quod termini octavum subsequentes ex
ipso sine difficultate computantur. Est enim

PRO PARTE PRIORE

$$\text{terminus IX.} = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{17} \right) \text{ VIII.}$$

$$\text{--- X.} = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{19} \right) \text{ IX.}$$

$$\text{--- XI.} = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{21} \right) \text{ X.}$$

etc.,

PRO PARTE POSTERIORE

$$\text{terminus IX.} = \frac{2}{100} \left(1 - \frac{1}{17} \right) \text{ VIII.}$$

$$\text{--- X.} = \frac{2}{100} \left(1 - \frac{1}{19} \right) \text{ IX.}$$

$$\text{--- XI.} = \frac{2}{100} \left(1 - \frac{1}{21} \right) \text{ X.}$$

etc.

16. Quo usus harum formularum magis elucescat, quaeramus valo
ipsius π usque ad 16 figuras; et calculus erit

PRO PARTE PRIORE

I. . . . VIII.	=	2,5 7 4 0 0 4 4 2 7 2 3 1 4 3 5 2 3
term. IX.	=	- - - - - 7 1 8 8 9 2 0 8 8
— X.	=	- - - - - 6 8 1 0 5 5 6 6
— XI.	=	- - - - - 6 4 8 6 2 4 4
— XII.	=	- - - - - 6 2 0 4 2 3
— XIII.	=	- - - - - 5 9 5 6 1
— XIV.	=	- - - - - 5 7 3 5
— XV.	=	- - - - - 5 5 4
— XVI.	=	- - - - - 5 4
Summa	=	2,5 7 4 0 0 4 4 3 5 1 7 3 1 3 7 4 8

PRO PARTE POSTERIORE

I. . . . VIII.	=	0,5 6 7 5 8 8 2 1 8 4 1 6 6 5 1 3 1
term. IX.	=	- - - - - 4 2 9
— X.	=	- - - - - 8
Pars II.	=	0,5 6 7 5 8 8 2 1 8 4 1 6 6 5 5 6 8 ¹⁾
Pars I.	=	2,5 7 4 0 0 4 4 3 5 1 7 3 1 3 7 4 8
hinc π	=	3,1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 1 6 ²⁾

17. Possunt vero etiam aliae huiusmodi formulae pro π inveniri, adhuc magis convergant ac pariter per potestatos denarii procedant. enim in genere sit

$$A \operatorname{tang.} \frac{\alpha}{a} = A \operatorname{tang.} \frac{\beta}{b} + A \operatorname{tang.} \frac{\alpha b - \beta a}{\alpha \beta + ab},$$

si sumamus $t = \frac{\alpha}{a}$ vel $\frac{\beta}{b}$, erit

$$\frac{tt}{1+tt} = \frac{aa}{\alpha\alpha + a\alpha} \quad \text{vel} \quad \frac{\beta\beta}{\beta\beta + b\beta},$$

sunt vero

$$t = \frac{\alpha b - \beta a}{\alpha \beta + ab}$$

1) Editio princeps: 7. C. B.

2) Editio princeps: 5. Correctae ultimae duae figurae sunt 23. C. B.

18. Quoniam igitur habuimus hanc formulam

$$\pi = 8 A \operatorname{tang.} \frac{1}{3} + 4 A \operatorname{tang.} \frac{1}{7},$$

loco prioris arcus ope reductionis allatae duos alios introducamus p
scilicet $\frac{\alpha}{a} = \frac{1}{3}$; et pro $\frac{\beta}{b}$ sumamus $\frac{1}{7}$ fietque tertius arcus $= A \operatorname{tang.} \frac{2}{11}$, it

$$A \operatorname{tang.} \frac{1}{3} = A \operatorname{tang.} \frac{1}{7} + A \operatorname{tang.} \frac{2}{11},$$

quo valore substituto formula nostra erit

$$\pi = 12 A \operatorname{tang.} \frac{1}{7} + 8 A \operatorname{tang.} \frac{2}{11},$$

cuius arcum priorem iam ante evolvinus. At vero ob

$$\frac{u}{1+u} = \frac{4}{125} = \frac{32}{1000}$$

pro altero habebimus

$$A \operatorname{tang.} \frac{2}{11} = \frac{22}{125} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{32}{1000} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{32}{1000} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{32}{1000} \right)^3 + \text{etc} \right]$$

Verum hic continua multiplicatio per numerum 32 non satis ad calculum idonea, praecipue autem haec series minus convergit quam quae e
deducta.

19. Hanc ob causam ponitus reiiciamus istum arcum, eiusque
reductionis supra datae substituamus duos novos arcus, quorum alte
statuendo $\frac{\alpha}{a} = \frac{2}{11}$ et $\frac{\beta}{b} = \frac{1}{7}$, hincque fiet

$$\frac{\alpha\beta - \beta\alpha}{\alpha\beta + \alpha\beta} = \frac{3}{79},$$

uno sequens obtinentur, dum ille bis per 12 multiplicetur et a producto abita pars subtrahatur nullo respectu habito ad loca ciphRARUM decimalium. Quandoquidem ex hoc capite aberrari nequit, dum satis constat, quoties quibet terminus minor est praecedente. Talem calculum pro sex prioribus terminis hic exhibeamus.

term. I. = 0,3 0 3 3 6

3 6 4 0 3 2

3. 4 3 6 8 3 8 4

1 4 5 6 1 2 8

term. II. = 2 9 1 2 2 5 6

3 4 9 4 7 0 7 2

5. 4 1 9 3 6 4 8 6 4

8 3 8 7 2 9 7 2 8

term. III. = 3 3 5 4 9 1 8 9 1 2

4 0 2 5 9 0 2 6 9 4 4

7. 4 8 3 1 0 8 3 2 3 3 2 8

6 9 0 1 5 4 7 4 7 6 1,1 4 2 8 5 7,1 4 2 8 5 7,1 4 2 etc.

term. IV. = 4 1 4 0 9 2 8 4 8 5 6 6,8 5 7 1 4 2,8 5 7 1 4 2,8 5 7 etc.

4 9 6 9 1 1 4 1 8 2 8 0 2,2 8 5 7 1 4,2 8 5 7 1 4,2 8 5 etc.

9. 5 9 6 2 9 3 7 0 1 9 3 6 2 7,4 2 8 5 7 1,4 2 8 5 7 1,4 2 8 etc.

6 6 2 5 4 8 5 5 7 7 0 6 9,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4 etc.

term. V. = 5 3 0 0 3 8 8 4 6 1 6 5 5 7,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4 etc.

6 3 6 0 4 6 6 1 5 3 9 8 6 9 2,5 7 1 4 2 8,5 7 1 4 2 8,5 7 1 etc.

11. 7 6 3 2 5 5 9 3 8 4 7 8 4 3 1 0,8 5 7 1 4 2,8 5 7 1 4 2,8 5 7 etc.

6 9 3 8 6 9 0 3 4 9 8 0 3 9 1,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 etc.

term. VI. = 6 9 3 8 6 9 0 3 4 9 8 0 3 9 1,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 etc.

unde ipsos terminos desumamus et in unam summam colligamus:

term. I. = 0,30336

— II. = 2912256

— III. = 3354918912

— IV. = 414092848566,857142,857142

— V. = 53003884616557,714285,7

— VI. = 693869034980391,896

Summa = 0,303651561506514781282057700391,89610

96103,896103,8 etc.,

ubi imprimis notatu dignum occurrit, quod summa quinque priorum
 norum absolute exhiberi potest, dum scilicet fractio decimalis in figu-
 abrumpitur, haecque postrema formula pro π data ad calculum maxime
 accommodata.

22. Ex eodem principio, unde nostram seriem deduximus, aliae
 series derivari possunt pariter maxime convergentes. Inchoando sci-
 serie vulgari

$$\text{A tang. } t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \text{etc.}$$

ponamus huius seriei iam n terminos acta esse collectos, quorum sum-

$$\Sigma = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \dots \pm \frac{t^{2n-1}}{2n-1}$$

Summam autem sequentium terminorum statuamus

$$s = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+3}}{2n+3} + \frac{t^{2n+5}}{2n+5} - \text{etc.},$$

ea ut sit

$$A \text{ tang. } t = \Sigma \pm s,$$

ubi ergo numerus Σ tanquam iam inventus spectatur, alter vero s investigari debeat.

23. Ratiocinium igitur eodem modo instituamus, ut supra § 4, quas operationes hic apponamus.

$$\begin{aligned} s &= \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+3}}{2n+3} + \frac{t^{2n+5}}{2n+5} - \text{etc.}, \\ stt &= \frac{t^{2n+3}}{2n+1} - \frac{t^{2n+5}}{2n+3} + \text{etc.}, \\ s(1+tt) &= \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2t^{2n+5}}{(2n+3)(2n+5)} + \text{etc.} \\ &= \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + s'tt, \end{aligned}$$

ergo

$$\begin{aligned} s' &= \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2t^{2n+3}}{(2n+3)(2n+5)} + \text{etc.}, \\ s'tt &= \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} - \text{etc.}, \\ s'(1+tt) &= \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{2 \cdot 4t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} - \text{etc.} \\ &= \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + s''tt \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

24. Quodsi iam valores introducti restituantur, facile patet tandem ad hanc seriem perventum iri

$$\begin{aligned} s &= \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(1+tt)} + \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(1+tt)^2} \\ &\quad + \frac{2 \cdot 4t^{2n+5}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(1+tt)^3} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

quae expressio contrahitur in sequentem

$$s = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(1+tt)} \left(1 + \frac{2tt}{(2n+3)(1+tt)} + \frac{2 \cdot 4t^4}{(2n+3)(2n+5)(1+tt)} \right)$$

haecque series utique aliquanto magis convergit quam praecedens quod denominatores multo maiores sunt quam numeratores; verumulae ante exhibitae his seriebus longissime anteforandae videntur ad usum practicum respiciamus.

DE NOVO GENERE SERIERUM RATIONALIUM ET VALDE CONVERGENTIUM QUIBUS RATIO PERIPHERIAE AD DIAMETRUM EXPRIMI POTEST¹⁾

Conventui exhibita die 17. Iunii 1779

Commentatio 706 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academicae scientiarum Petropolitanae 11 (1793), 1798, p. 150—154

Summarium ibidem p. 169

SUMMARIVM

Ce nouveau genre de séries est aussi déduit de la décomposition

$$\pi = 8 \Lambda \operatorname{tang.} \frac{1}{3} + 4 \Lambda \operatorname{tang.} \frac{1}{7};$$

le principe du développement de ces arcs en séries est très différent de celui du
oïre précédent. Le voici: Comme

$$\Lambda \operatorname{tang.} \frac{x}{2-x} = \int_0^x \frac{\partial x}{2-2x+xx} = 2 \int_0^x \frac{\partial x}{4+x^2} + 2 \int_0^x \frac{x \partial x}{4+x^2} + \int_0^x \frac{xx \partial x}{4+x^2},$$

aura par les procédés connus

$$\Lambda \operatorname{tang.} \frac{x}{2-x} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{x^2}{4} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{x^4}{4} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{x^6}{4} \right) + \text{etc.} \right] \\ + \frac{xx}{4} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{x^2}{4} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{x^4}{4} \right) - \frac{1}{7} \left(\frac{x^6}{4} \right) + \text{etc.} \right] \\ + \frac{x^3}{4} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \left(\frac{x^2}{4} \right) + \frac{1}{11} \left(\frac{x^4}{4} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{x^6}{4} \right) + \text{etc.} \right] \end{array} \right\}.$$

1) Confer hac cum dissertatione praecedentem et alias in nota 1 ad p. 1 adiecta laudatas.
C. B.

En mettant donc premièrement $x = \frac{1}{2}$ et ensuite $x = \frac{1}{4}$, on aura trois séries et autant pour $A \text{ tang. } \frac{1}{7}$, et la circonférence π sera exprimée par six séries cédent selon des puissances de 2, c'est-à-dire les trois premières selon les p et les trois dernières selon les puissances de $\frac{1}{1024}$, par conséquent toutes convergentes et, de plus, très commodes pour le calcul.

1. Principium, unde hae series sunt deductae, situm est in binomiali: $4 + x^4$, quam constat involvere hos duos factores rati

$$2 + 2x + xx \quad \text{et} \quad 2 - 2x + xx.$$

Hinc enim statim sequitur hanc formulam integram

$$\int \frac{\partial x (2 + 2x + xx)}{4 + x^4},$$

quam signo \odot indicemus, reduci ad hanc

$$\odot = \int \frac{\partial x}{2 - 2x + xx},$$

cuius integrale ita sumtum, ut evanescat posito $x = 0$, est $A \text{ tang. } \frac{1}{3}$ observetur

$$\text{casu } x = 1 \quad \text{esse} \quad \odot = \frac{\pi}{4};$$

at vero

$$\text{casu } x = \frac{1}{2} \quad \text{erit} \quad \odot = A \text{ tang. } \frac{1}{3},$$

tum vero

$$\text{casu } x = \frac{1}{4} \quad \text{erit} \quad \odot = A \text{ tang. } \frac{1}{7}.$$

Notum autem est esse¹⁾

$$2 A \text{ tang. } \frac{1}{3} + A \text{ tang. } \frac{1}{7} = A \text{ tang. } 1 = \frac{\pi}{4}.$$

1) Confer praecedentis Commentationis § 3, huius voluminis p. 5.

2. Cum igitur formula integralis illa signo \odot indicata tribus constet artibus, singulas seorsim evolvamus, quas brevitatis gratia sequentibus characteribus insigniamus

$$I. \int \frac{\partial x}{4+x^4} = \mathfrak{h}, \quad II. \int \frac{x \partial x}{4+x^4} = \mathfrak{z}, \quad III. \int \frac{xx \partial x}{4+x^4} = \sigma,$$

ut sit

$$\odot = 2\mathfrak{h} + 2\mathfrak{z} + \sigma = A \operatorname{tang.} \frac{x}{2-x}.$$

Nunc igitur istas tres formulas integrales more solito in series infinitas evolvamus inde formandas, quod sit

$$\frac{1}{4+x^4} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{4^2} - \frac{x^{12}}{4^3} + \frac{x^{16}}{4^4} - \text{etc.} \right).$$

3. Quodsi iam primo istam seriem ducamus in ∂x et integremus, prima formula, \mathfrak{h} , per sequentem seriem exprimitur

$$\mathfrak{h} = \frac{x}{4} \left[1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1}{9} \left(\frac{x^4}{4} \right)^2 - \frac{1}{13} \left(\frac{x^4}{4} \right)^3 + \text{etc.} \right].$$

At vero illa series ducta in $x \partial x$ et integrata dabit

$$\mathfrak{z} = \frac{xx}{8} \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1}{5} \left(\frac{x^4}{4} \right)^2 - \frac{1}{7} \left(\frac{x^4}{4} \right)^3 + \text{etc.} \right].$$

Denique eadem series ducta in $xx \partial x$ et integrata praebet

$$\sigma = \frac{x^3}{4} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1}{11} \left(\frac{x^4}{4} \right)^2 - \frac{1}{15} \left(\frac{x^4}{4} \right)^3 + \text{etc.} \right].$$

4. Cum igitur sit

$$\odot = 2\mathfrak{h} + 2\mathfrak{z} + \sigma,$$

evolvamus seorsim casus initio memoratos, quibus est vel $x = \frac{1}{4}$, quorum primo est $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}$, secundo vero est $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{1024}$; unde patet binos casus posteriores maxime convergere ipsa prima, cuius termini in ratione quadrupla decrescunt, iam quam series LEIBNITIANA sumto arcu, cuius tangens est $\frac{1}{\sqrt{3}}$, per hic calculus nulla irrationalitate perturbatur.

EVOLUTIO CASUS PRIMI, QUO $x = 1$ ET $\odot = A$ tangens

5. Cum igitur hic sit $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}$, tres nostrae series primae sequenti modo procedent.

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{13} \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \frac{1}{17} \left(\frac{1}{4} \right)^4 - \dots \right]$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{8} \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{4} \right)^4 - \dots \right]$$

$$\sigma = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{11} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{15} \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \frac{1}{19} \left(\frac{1}{4} \right)^4 - \dots \right]$$

6. Cum igitur sit

$$\odot = 2\mathfrak{h} + 2\mathfrak{A} + \sigma = \frac{\pi}{4},$$

per 4 multiplicando valor ipsius π per sequentes tres series

$$\pi = \begin{cases} 2 \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4^2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{4^4} - \dots \right) \\ + 1 \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4^4} - \dots \right) \\ + 1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{4^2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{4^4} - \dots \right) \end{cases}$$

7. Ex his certe ternis seriebus ratio peripheriae ad diametrum minore labore computari potuisset, quam ex serie LEIBNITIANA.

ideo usque ad 128 determinavit. At vero sequentes casus multo magis in laborem sublevare possent.

EVOLUTIO CASUS SECUNDI, QUO $x = \frac{1}{2}$

8. Hoc igitur casu erit $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{64}$, unde tres illae series sequenti modo entur

$$b = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.} \right),$$

$$2 = \frac{1}{32} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.} \right),$$

$$c = \frac{1}{32} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.} \right).$$

9. Cum igitur

$$2b + 22 + c = A \text{ tang. } \frac{1}{3},$$

$$A \text{ tang. } \frac{1}{3} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{16} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{32} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.} \right) \end{array} \right\}.$$

autem hic tres computandae sunt series, tamen, quia singulae secundum rationem 1 : 64 decrescunt, laborem mirum in modum contrahere licebit.

1) Vide notas 2), 3), 4) p. 3 huius voluminis adiectas. C. B.

EVOLUTIO CASUS TERTII, QUO $x = \frac{1}{4}$

10. Cum igitur hic sit $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{1024}$, series nostrae tres principales habebunt

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{16} \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.} \right), \\ 2d &= \frac{1}{128} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.} \right), \\ e &= \frac{1}{256} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.} \right). \end{aligned}$$

11. Cum igitur

$$2b + 2d + e = A \operatorname{tang.} \frac{1}{7},$$

erit his seriebus debite iunctis

$$A \operatorname{tang.} \frac{1}{7} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{1}{64} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{1}{256} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.} \right) \end{aligned} \right\}$$

APPLICATIO BINORUM CASUUM POSTERIORUM AD PERIPHERIAM CIRCULI PER SERIES MAXIME CONVERGEN EXPRIMENDAM

12. Cum sit, uti iam observavimus,

$$\frac{\pi}{4} = 2 A \operatorname{tang.} \frac{1}{3} + A \operatorname{tang.} \frac{1}{7},$$

erit

$$\pi = 8 A \operatorname{tang.} \frac{1}{3} + 4 A \operatorname{tang.} \frac{1}{7};$$

seriis supra inventis substitutis valor ipsius π per sex sequentes series
coniunctim exprimitur:

$$\pi = \left\{ \begin{array}{l} 2 \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{16} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{64} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.} \right). \end{array} \right.$$

Hic ergo maxime notatu dignum occurrit, quod omnes istae series per sola
potestates binarii procedant.

DE EVOLUTIONE POTESTATIS POLYNOMIALIS CUIUSCUNQUE

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.})^n$$

Conventui exhibita die 6. Julii 1778

Commentatio 709 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 12 (1794), 1801, p. 47--

Summarium ibidem p. 63--64

SUMMARIIUM

Tous les Géomètres connoissent la signification des caractères $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, etc., dont feu Mr. EULER s'est servi pour indiquer les coefficients de la n^{me} puissance et les grands avantages qu'il a retiré de ce symbolisme pour découvrir plusieurs propriétés remarquables de ces coefficients. Dans le présent Mémoire, son dessein a été de développer les coefficients de la n^{me} puissance du trinome, qu'il désigne par les caractères $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ etc., au moyen de ceux du binome, $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ etc., de même que les coefficients du quadrinome par ceux du trinome, et ainsi de suite.

Pour effectuer ceci, il développe le trinome $(1 + x(1 + x))^n$; et comme le terme de cette puissance développée est $\binom{n}{\alpha} x^\alpha (1 + x)^\alpha$, en développant $(1 + x)^\alpha$, le terme sera $\binom{\alpha}{\beta} x^\beta$. Ainsi le coefficient du terme $x^{\alpha+\beta}$ sera $\binom{n}{\alpha}^3 \binom{n}{\alpha}$; de sorte que,

1) Confor hac cum Commentatione praeter Commentationes 326 et 551 praeter Commentationem 722 huiusce voluminis. C. B.

coefficient $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3$ de la puissance x^λ dans le trinome $(1+x+xx)^n$ développé, on n'a qu'à donner à α et β toutes les valeurs en nombres entiers qui rendent $\alpha + \beta = \lambda$, et on aura

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3 = \left(\frac{\lambda}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{\lambda}\right) + \left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{\lambda-1}\right) + \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{\lambda-2}\right) + \text{etc.}$$

D'une manière semblable l'auteur procède pour trouver le coefficient $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^4$ de la puissance x^λ dans le quadrinome développé $(1+x+x^2+x^3)^n$ et le coefficient $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^5$ du même terme x^λ dans le quinquinome $(1+x+x^2+x^3+x^4)^n$, ce qui le conduit enfin à l'expression générale du coefficient $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{o+1}$ du terme x^λ dans le polynome développé

$$(1+x+x^2+x^3+\dots+x^o)^n,$$

qui est

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{o+1} = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right) + \text{etc.}$$

1. Incipiamus a potestate binomiali $(1+x)^n$, qua more solito evoluta designemus coefficientem potestatis cuiusvis x^λ hoc characterem $\left(\frac{n}{\lambda}\right)$, ita ut sit

$$(1+x)^n = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)xx + \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)x^4 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)x^n,$$

ubi ergo erit

$$\left(\frac{n}{1}\right) = n, \quad \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \quad \left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \text{etc.},$$

et in genere

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right) = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda},$$

unde patet casu $\lambda = 0$ et $\lambda = n$ fore

$$\left(\frac{n}{0}\right) = \left(\frac{n}{n}\right) = 1$$

atque adeo in genere

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right) = \left(\frac{n}{n-\lambda}\right).$$

Praeterea vero notasse iuvabit tam casibus, quibus λ est numerus
quam quibus est numerus maior quam n , significatum formae
esse nihilo aequalem.

2. Quoniam per hos characteres calculus non mediocriter
contrahitur, similibus characteribus utamur etiam in evolutione
trinomialium, quadrinomialium et generatim polynomialium.
Hunc in finem superioribus characteribus pro binomio adhibemus
quasi exponentem 2, quandoquidem hinc nulla ambiguitas est
nec in huiusmodi calculis nullae potestates horum characterum
solent; hoc modo pro evolutione potestatis binomialis habebimus

$$(1+x)^n = \left(\frac{n}{0}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)xx + \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + \text{etc.}$$

ubi ergo meminisse oportet esse in genere

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^z = \left(\frac{n}{n-\lambda}\right)^z,$$

tum vero perpetuo

$$\left(\frac{n}{0}\right)^z = \left(\frac{n}{n}\right)^z = 1$$

atque has formulas in nihilum abire casibus, quibus est λ vel
integer negativus vel positivus maior quam n .

3. Iisdem igitur characteribus utemur pro evolutione polynomialium
quarumcunque, dummodo pro trinomialibus adiungamus
exponentem ternarium, pro quadrinomialibus quaternarium, pro
quinarium et ita porro, hoc scilicet modo:

Pro trinomialibus $(1+x+xx)^n$ evolutio praebeat

$$\left(\frac{n}{0}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)x^4 + \text{etc.}$$

Pro quadrinomialibus $(1+x+xx+x^3)^n$ evolutio praebeat

$$\left(\frac{n}{0}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)x^4 + \text{etc.}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}xx + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \binom{n}{5}x^5 + \text{etc.}$$

etc.

1. His explicatis inquiramus in veros valores horum characterum ex-
atibus 3, 4, 5, 6 etc. insignitorum et videamus, quomodo illi per charac-
binario notatos, quippe quorum significatus est notissimus, determinari
nt. Singulos igitur casus harum potestatum polynomialium ordine per-
mus.

EVOLUTIO POTESSTATIS TRINOMIALIS

$$(1 + x + xx)^n$$

6. Seriem hinc oriundam hoc modo repraesentemus

$$\left(\frac{n}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^3 x + \left(\frac{n}{2}\right)^3 xx + \left(\frac{n}{3}\right)^3 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^3 x^4 + \text{etc.},$$

terminus ultimus erit $= \left(\frac{n}{2n}\right)^3 x^{2n}$, ubi coefficientem $\left(\frac{n}{2n}\right)^3$ iam novimus
unitati aequalem, perinde ac terminum primum $\left(\frac{n}{0}\right)^3$; tum vero, quia
cientes isti retro eodem ordine progrediuntur, hinc sequitur fore

$$= \left(\frac{n}{2n-1}\right)^3, \quad \left(\frac{n}{2}\right)^3 = \left(\frac{n}{2n-2}\right)^3 \quad \text{atque adeo in genere} \quad \left(\frac{n}{\lambda}\right)^3 = \left(\frac{n}{2n-\lambda}\right)^3.$$

hic evidens est valorem formulae $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3$ in nihilum abire tam casibus,
s λ est numerus integer negativus, quam casibus, quibus est positivus
quam $2n$.

8. Ante autem quam determinationem horum characterum suscipiamus,
incongruum erit evolutionem casuum simpliciorum ante oculos posuisse:

n	$(1 + x + xx)^n$
0	1
1	$1 + x + xx$
2	$1 + 2x + 3xx + 2x^3 + x^4$
3	$1 + 3x + 6xx + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$
4	$1 + 4x + 10xx + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8$
5	$1 + 5x + 15xx + 30x^3 + 45x^4 + 51x^5 + 45x^6 + 30x^7 + 15x^8 + 5x^9 + x^{10}$
6	$1 + 6x + 21xx + 50x^3 + 90x^4 + 126x^5 + 141x^6 + 126x^7 + 90x^8 + 50x^9 + 21x^{10} + x^{11}$
	etc.

Ex ultimo casu, quo $n = 6$, patet igitur esse

$$\left(\frac{6}{0}\right)^3 = 1, \quad \left(\frac{6}{1}\right)^3 = 6, \quad \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 21, \quad \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 50, \quad \left(\frac{6}{4}\right)^3 = 90, \quad \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 126,$$

$$\left(\frac{6}{6}\right)^3 = 141,$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = 126, \quad \left(\frac{6}{8}\right)^3 = 90, \quad \left(\frac{6}{9}\right)^3 = 50, \quad \left(\frac{6}{10}\right)^3 = 21, \quad \left(\frac{6}{11}\right)^3 = 6, \quad \left(\frac{6}{12}\right)^3 = 1.$$

7. Ut nunc investigemus, quomodo hi characteres ex trinomio orti similes characteres ex binomio ortos exprimi queant, potestatem propositam sub forma binomiali repraesentemus hoc modo

$$[1 + x(1 + x)]^n,$$

cuius evolutio ergo praebebit hanc progressionem

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 x(1 + x) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 xx(1 + x)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 x^3(1 + x)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 x^4(1 + x)^4 + \text{etc.}$$

cuius terminus generalis hanc habebit formam

$$\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha (1 + x)^\alpha.$$

potestas x' , quatenus quidem in iis continetur. Forma autem generalis est $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha (1+x)^\alpha$; unde ob

$$(1+x)^\alpha = 1 + \left(\frac{\alpha}{1}\right)x + \left(\frac{\alpha}{2}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)x^3 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)x^4 + \text{etc.},$$

quia hic occurrit generatim terminus $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 x^\beta$, is ductus in $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha$ praebebit $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^{\alpha+\beta}$. Quodsi ergo fuerit $\alpha + \beta = \lambda$, coefficientis $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \left(\frac{n}{\alpha}\right)^2$ pars erit coefficientis quaesiti $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2$.

9. Quamobrem ad valorem coefficientis $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2$ eruendum tantum opus est litteris α et β omnes valores in integris tribuere, quibus prodire poterit $\alpha + \beta = \lambda$. Evidens autem est ambos hos numeros α et β neque negativos neque maiores quam n capi debere, quia alioquin ista forma evanesceret; tum vero, etiam si esset $\beta > \alpha$, formula $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$ pariter esset nulla. Hinc igitur maximus valor pro α assumendus erit $= \lambda$, tum vero $\beta = 0$; unde sequitur

$$\begin{array}{llllll} \text{si} & \alpha = \lambda, & \lambda - 1, & \lambda - 2, & \lambda - 3, & \lambda - 4 \quad \text{etc.}, \\ \text{fore} & \beta = 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \quad \text{etc.} \end{array}$$

10. Producta igitur ex singulis his casibus orta et in unam summam collecta dabunt valorem quaesitum characteris $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2$, ita ut nacti simus hanc determinationem

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda-3}{3}\right)^2 \left(\frac{n}{\lambda-3}\right)^2 + \text{etc.}$$

sicque isto valor per partes cognitus exprimitur, quarum numerus quovis casus est finitus.

ipsi λ valores 0, 1, 2, 3, 4 etc., eritque ut sequitur:

$$\left(\frac{n}{0}\right)^3 = 1,$$

$$\left(\frac{n}{1}\right)^3 = \left(\frac{1}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{1}\right)^2 = n,$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{1}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + n =$$

$$\left(\frac{n}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{3}\right)^3 = \left(\frac{n}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \left(\frac{4}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{3}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{5}\right)^3 = \left(\frac{n}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{6}\right)^3 = \left(\frac{6}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^2 \left(\frac{n}{3}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{6}\right)^3 = \left(\frac{n}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{n}{5}\right)^2 + 6\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{7}\right)^3 = \left(\frac{7}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{n}{4}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{7}\right)^3 = \left(\frac{n}{7}\right)^2 + 6\left(\frac{n}{6}\right)^2 + 10\left(\frac{n}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{8}\right)^3 = \left(\frac{8}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{4}\right)^2 \left(\frac{n}{4}\right)^2$$

$$\frac{n}{9})^3 = \left(\frac{9}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^2 \left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{n}{5}\right)^2$$

0

$$\frac{n}{9})^3 = \left(\frac{n}{9}\right)^3 + 8\left(\frac{n}{8}\right)^3 + 21\left(\frac{n}{7}\right)^3 + 20\left(\frac{n}{6}\right)^3 + 5\left(\frac{n}{5}\right)^3,$$

$$\frac{n}{10})^3 = \left(\frac{10}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 \left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{4}\right)^2 \left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{5}\right)^2 \left(\frac{n}{5}\right)^2$$

0

$$\frac{n}{10})^3 = \left(\frac{n}{10}\right)^3 + 9\left(\frac{n}{9}\right)^3 + 28\left(\frac{n}{8}\right)^3 + 35\left(\frac{n}{7}\right)^3 + 15\left(\frac{n}{6}\right)^3 + \left(\frac{n}{5}\right)^3$$

etc.

12. Applicamus haec exempli loco ad casum $n=6$, quippe quem supra iam evolvimus; ac reperiemus:

$$\left(\frac{6}{0}\right)^3 = 1,$$

$$\left(\frac{6}{1}\right)^3 = 6,$$

$$\left(\frac{6}{2}\right)^3 = 21,$$

$$\left(\frac{6}{3}\right)^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 50,$$

$$\left(\frac{6}{4}\right)^3 = \left(\frac{6}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{6}{3}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 15 + 3 \cdot 20 + 15 = 90,$$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{6}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{6}{3}\right)^2 = 6 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 20 = 126,$$

$$\left(\frac{6}{6}\right)^3 = \left(\frac{6}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{6}{5}\right)^2 + 6\left(\frac{6}{4}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 1 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 15 + 20 = 141,$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \left(\frac{6}{7}\right)^2 + 6\left(\frac{6}{6}\right)^2 + 10\left(\frac{6}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{6}{4}\right)^2 = 6 + 10 \cdot 6 + 4 \cdot 15 = 126,$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 126;$$

simili modo erit

$$\left(\frac{6}{8}\right)^3 = \left(\frac{6}{4}\right)^3 = 90, \quad \left(\frac{6}{9}\right)^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 50, \quad \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 21, \quad \left(\frac{6}{11}\right)^3 =$$

ac denique

$$\left(\frac{6}{12}\right)^3 = \left(\frac{6}{6}\right)^3 = 1,$$

qui valores cum supra datis egregie conveniunt.

EVOLUTIO POTESSTATIS QUADRINOMIALIS

$$(1 + x + xx + x^3)^n$$

13. Valorem igitur hunc evolutum ita repraesentabimus

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)xx + \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)x^4 + \left(\frac{n}{5}\right)x^5 + \text{etc.}$$

ubi scilicet est $\left(\frac{n}{0}\right) = 1$. Deinde, quia ultimus terminus est x^3 , et quia coefficients retro scripti eundem ordinem servant, erit
atque in genere

$$\left(\frac{n}{3n-\lambda}\right) = \left(\frac{n}{\lambda}\right);$$

ubi observetur tam casibus, quibus λ est numerus integer ne-
positivus maior quam $3n$, valores huius formulae in nihilum
notatis hic mihi est propositum indagare, quomodo hi characteres
notati per characteres sive binario sive ternario notatos, utpote
definiri queant.

14. Antequam hunc laborem suscipiamus, casus simpliciores
propositae in tabula subiuncta ob oculos ponamus.

$$\begin{aligned}
& (1 + x + \dots + xx + \dots + x^n) \\
& (2x + \dots + 3xx + \dots + 4x^3 + \dots + 3x^4 + \dots + 2x^6 + \dots + x^6) \\
& (3x + \dots + 6xx + \dots + 10x^3 + \dots + 12x^4 + \dots + 12x^6 + \dots + 10x^8 + \dots + 6x^7 + \dots + 3x^9 + \dots + x^9) \\
& (4x + \dots + 10xx + \dots + 20x^3 + \dots + 31x^4 + \dots + 40x^5 + \dots + 44x^6 + \dots + 40x^7 + \dots + 31x^8 + \dots + 20x^9 + \dots + \text{etc.}) \\
& (5x + \dots + 15xx + \dots + 35x^3 + \dots + 65x^4 + \dots + 101x^5 + \dots + 135x^6 + \dots + 155x^7 + \dots + 155x^8 + \dots + 135x^9 + \dots + \text{etc.}) \\
& (6x + \dots + 21xx + \dots + 56x^3 + \dots + 120x^4 + \dots + 216x^5 + \dots + 336x^6 + \dots + 456x^7 + \dots + 546x^8 + \dots + 580x^9 + \dots + \text{etc.}) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

5. Nunc formulam propositam sub hac binomiali

$$(1 + x(1 + x + xx))^n$$

imus, cuiusque evolutio nobis præbet hanc seriem

$$1 + \left(\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix}\right)x(1 + x + xx) + \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right)x^2(1 + x + xx)^2 + \text{etc.},$$

terminus generalis est

$$\left(\begin{smallmatrix} n \\ a \end{smallmatrix}\right)x^a(1 + x + xx)^a,$$

vero, quia $1 + x + xx$ est potestas trinomialis, erit

$$1 + x + xx = 1 + \left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix}\right)x + \left(\begin{smallmatrix} a \\ 2 \end{smallmatrix}\right)xx + \left(\begin{smallmatrix} a \\ 3 \end{smallmatrix}\right)x^3 + \text{etc.},$$

iterum terminus generalis est $\left(\begin{smallmatrix} n \\ \mu \end{smallmatrix}\right)x^\mu$; unde si proponatur potestas x^k ante $1 + x + xx$, hoc membro orietur pro hac potestate $\left(\begin{smallmatrix} a \\ \mu \end{smallmatrix}\right)^3 \left(\begin{smallmatrix} n \\ a \end{smallmatrix}\right)^3 x^k$.

unam summam conigantur, quo natus erit

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^4 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-3}\right)^2 \left(\frac{\lambda-3}{3}\right)^3$$

Sicque patet, quomodo omnes characteres quaternario notati per iam sive binario sive ternario notatos determinentur; quod quo clarius loco λ successive scribamus numeros 0, 1, 2, 3, 4 etc. ac reperiemus

$$\left(\frac{n}{0}\right)^4 = \left(\frac{n}{0}\right)^2 \left(\frac{0}{0}\right)^3 = 1,$$

$$\left(\frac{n}{1}\right)^4 = \left(\frac{n}{1}\right)^2 \left(\frac{1}{0}\right)^3 = n,$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^4 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 \left(\frac{1}{1}\right)^3 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n,$$

$$\left(\frac{n}{3}\right)^4 = \left(\frac{n}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

sive

$$\left(\frac{n}{3}\right)^4 = \left(\frac{n}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{4}\right)^4 = \left(\frac{n}{4}\right)^2 \left(\frac{4}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

sive

$$\left(\frac{n}{4}\right)^4 = \left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{5}\right)^4 = \left(\frac{n}{5}\right)^2 \left(\frac{5}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 \left(\frac{4}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

$$\left(\frac{n}{6}\right)^4 = \left(\frac{n}{6}\right)^2 \left(\frac{6}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{5}\right)^2 \left(\frac{5}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 \left(\frac{4}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \text{etc.},$$

$$\left(\frac{n}{7}\right)^4 = \left(\frac{n}{7}\right)^2 \left(\frac{7}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{6}\right)^2 \left(\frac{6}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{5}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \text{etc.},$$

$$\left(\frac{n}{8}\right)^4 = \left(\frac{n}{8}\right)^2 \left(\frac{8}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{7}\right)^2 \left(\frac{7}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{6}\right)^2 \left(\frac{6}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{5}\right)^2 \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 \left(\frac{4}{4}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2$$

etc.

$$(1 + x + xx + x^3 + x^4)^n$$

17. Eius ergo valorem evolutum ita exhibemus

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)x^4 + \left(\frac{n}{5}\right)x^5 + \text{etc.},$$

est

$$\left(\frac{n}{0}\right)^5 = \left(\frac{n}{4n}\right)^5 = 1$$

in genere

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^5 = \left(\frac{n}{4n - \lambda}\right)^5;$$

vero patet hos valores evanescere tam casibus, quibus est λ numerus
 er negativus, quam quibus est positivus maior quam $4n$.

18. Nunc eadem forma tanquam binomium repraesentata erit

$$[1 + x(1 + x + xx + x^3)]^n,$$

evolutio in genere praebet membrum $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha (1 + x + xx + x^3)^\alpha$, ubi factor
 $(1 + x + xx + x^3)^\alpha$ continet terminum $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 x^\beta$, ita ut iunctim habeatur iste ter-
 $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 x^{\alpha + \beta}$. Quare si fuerit $\alpha + \beta = \lambda$, potestatis x^λ ex hoc membro
 tiens erit $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4$. Iam litteris α et β tribuantur omnes valores, quos
 re possunt incipiendo ab $\alpha = \lambda$; atque coëfficiens quaesitus erit

$$= \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda - 1}\right)^2 \left(\frac{\lambda - 1}{1}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda - 2}\right)^2 \left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda - 3}\right)^2 \left(\frac{\lambda - 3}{3}\right)^4 + \text{etc.}$$

omnes characteres numero 5 notati per characteres ordinis praecedentis
 o 4 notatos una cum characteribus numero 2 notatis definientur.

) Editio princeps: *quinquenomialis*. C. B.

19. Ex his iam satis liquet, si proponatur potestas polynomialis
ex terminis numero $\theta + 1$ constantibus, scilicet

$$(1 + x + xx + x^3 + \dots + x^\theta)^n,$$

tum termini potestatem x^λ continentis coefficientem fore $\binom{n}{\lambda}^{\theta+1}$
characteribus numero θ notatis componetur, ut sit

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{\theta+1} = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^{\theta} \left(\frac{\lambda}{0}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^{\theta} \left(\frac{\lambda-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^{\theta} \left(\frac{\lambda-2}{2}\right) + \dots$$

quae forma omnes praecedentes in se complectitur. Si enim
valore $\theta = 1$, hoc casu habetur potestas binomialis $(1+x)^n$, chara-
unitate notati oriuntur ex potestate monomiali 1^n , unde oritur $\binom{n}{0}$
vero omnes in nihilum abeunt. Hinc per casus procedendo ha-
sequitur:

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right) = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right) + \dots$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^4 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right) + \dots$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^5 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right) + \dots$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^6 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right) + \dots$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^7 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right) + \dots$$

etc.

SPECIMEN TRANSFORMATIONIS SINGULARIS SERIARUM

Conventui exhibita die 3. Septembris 1778

Commentatio 710 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academias scientiarum Petropolitanae 12 (1794), 1801, p. 58—70

Summarium ibidem p. 64—65

SUMMARIUM

Les séries dont il est question dans ce Mémoire sont comprises sous la forme générale

$$s = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} x + \frac{H(a+1)(b+1)}{2(c+1)} x^2 + \frac{H(a+2)(b+2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.},$$

Il marque dans chaque terme le coefficient du terme précédent; elle devient une expression finie toutes les fois que a ou b est un nombre entier négatif, et elle a cela de remarquable qu'en mettant

$$s = z(1-x)^{c-a-b}, \quad c-a=\alpha, \quad c-b=\beta,$$

on exprime par une série parfaitement semblable à la proposée, savoir

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot c} x + \frac{H(\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)} x^2 + \frac{H(\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.}$$

L'analyse qui a conduit l'auteur à cette transformation singulière consiste à transformer la série proposée en une équation différentielle du second degré, opération qui se fait facilement et qui donne

$$x(1-x) \frac{\partial^2 s}{\partial s^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{\partial s}{\partial s} - ab = 0.$$

$$\frac{\partial \partial s}{s} = \frac{\partial \partial z}{z} - \frac{2n \partial x \partial z}{z(1-x)} + \frac{n(n-1) \partial x^2}{(1-x)^2}$$

et ces valeurs étant substituées dans l'équation différentielle du second degré, on ob-

$$x(1-x) \frac{\partial^2 \partial z}{z^2} + [c + (a+b-2c-1)x] \frac{\partial z}{z} - (c-a)(c-b) = 0$$

ou bien, à cause de $c-a=\alpha$, $c-b=\beta$,

$$x(1-x) \frac{\partial^2 \partial z}{z^2} + [c - (\alpha + \beta + 1)] \frac{\partial z}{z} - \alpha\beta = 0,$$

équation qui se déduit aussi de la précédente en changeant s , a et b en z , α et β faisant donc le même changement dans la série proposée, il en résultera l'autre série. La relation mutuelle entre les deux séries est la même qui subsiste entre les deux équations différentielles, savoir $c-a=\alpha$, $c-b=\beta$ et $s=(1-x)^n z$, où l'exposant $n=c$.

L'auteur déduit aussi la seconde série d'une manière directe de la dernière équation différentio-différentielle; et il termine son Mémoire par faire voir le grand avantage qu'on peut retirer de cette transformation pour la démonstration rigoureuse d'un théorème de calcul intégral qu'il avoit trouvé autrefois par une simple conjecture et qui est ici complètement démontré, savoir que

$$\left(\frac{n+1}{i}\right)(1-au)^{-n} \int \Delta^i \partial \varphi \cos i \varphi = \left(\frac{i-n-1}{i}\right)(1-au)^{n+1} \int \Delta^{-n-1} \partial \varphi \cos i \varphi$$

où

$$\Delta = 1 + aa - 2a \cos \varphi.$$

(Voyez sur ce théorème le Mémoire¹⁾: *Demonstratio Theorematis insignis per conjecturam*, in *Instil. Calc. Integr.* Tomo IV. Supplem. p. 257.)

1. Contemplatus sum hanc seriem

$$s = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} x + \frac{a(a+1)(b+1)}{2(c+1)} x^2 + \frac{a(a+2)(b+2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.},$$

1) C'est le mémoire 674 de l'Index d'EXESTROEM; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, v. p. 197. C. B.

abrumpatur eiusque summa finito modo exprimat.

2. Quodsi nunc statuamus

$$s = z(1 - x)^{c-a-b}$$

porro faciamus

$$c - a = \alpha \quad \text{et} \quad c - b = \beta,$$

z exprimet summam huius seriei praecedenti omnino similis

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot c} x + H \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)} x^2 + H \frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.},$$

nunc abrumpitur omnibus casibus, quibus vel α vel β est numerus negativus, ideoque quoties fuerit vel $a - c$ vel $b - c$ numerus integer negativus.

3. Ista transformatio eo maioris momenti est censenda, quod non nisi longas ambages atque adeo per aequationes differentiales secundi gradus posse videatur. Operae igitur pretium erit totam analysin, cui ista transformatio inmittitur, dilucide exposuisse.

4. Cum sit

$$s = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} x + \frac{ab}{1 \cdot c} \cdot \frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)} \cdot xx + \text{etc.}$$

adeo in quovis termino sequente tam numerator quam denominator novos factores accipiat, per differentiationem primo ex quovis termino postremos factores tollamus, quod per has operationes praestabitur

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{ab}{1 \cdot c} + \frac{ab}{1 \cdot c} \cdot \frac{(a+1)(b+1)}{c+1} x + \text{etc.},$$

quae ducta in x^c ac denuo differentiata praebet

$$\partial \cdot x^c \partial s = abx^{c-1} + \frac{ab}{1 \cdot c} (a+1)(b+1)x^c + \text{etc.},$$

ubi brevitati consulentes elementum ∂x omisimus, quippe quod sponte intelligi potest.

5. Iam simili modo per differentiationem singulis numeratoribus novos factores adiungamus hoc modo:

1°. Series nostra ducta in x^a ac differentiata dabit

$$\partial \cdot x^a s = ax^{a-1} + \frac{ab}{1 \cdot c} (a+1)x^a + \text{etc.},$$

quae

2°. ducta in x^{b+1-a} iterumque differentiata praebet

$$\partial \cdot x^{b+1-a} \partial \cdot x^a s = abx^{b-1} + \frac{ab}{1 \cdot c} (a+1)(b+1)x^b + \text{etc.},$$

quae forma ex praecedente oritur, si ea multiplicetur per x^{b-c} .

6. Hinc igitur adipiscimur hanc aequationem

$$\partial \cdot x^{b-a+1} \partial \cdot x^a s = x^{b-c} \partial \cdot x^c \partial s,$$

quae aequatio evoluta reducitur ad hanc formam

$$x^{b+1} \partial \partial s + (a+b+1)x^b \partial s + abx^{b-1}s = x^b \partial \partial s + cx^{b-1} \partial s.$$

Haec aequatio divisa per x^{b-1} et omnibus terminis ad partem dextram latis induet hanc formam

$$0 = x(1-x) \partial \partial s + [c - (a+b+1)x] \partial s - abs,$$

ita ut a resolutione huius aequationis differentialis secundi gradus series propositae pendeat. At vero haec aequatio ita comparata esse ut in genere nullam integrationem admittat.

est

$$s = (1-x)^n z,$$

differentiando erit

$$ls = n(1-x) + lz,$$

$$\frac{cs}{s} = \frac{cz}{z} = \frac{ncx}{1-x}.$$

aequatio deinde differentiata praebet

$$\frac{cs}{s} = \frac{cs^2}{ss} = \frac{ccz}{z} = \frac{cz^2}{zz} = \frac{nncx^2}{(1-x)^2}.$$

addatur haec aequatio

$$\frac{cs^2}{ss} = \frac{cz^2}{zz} = \frac{2nncxz}{z(1-x)} + \frac{nncx^2}{(1-x)^2}$$

erodit

$$\frac{ccs}{s} = \frac{ccz}{z} = \frac{2nncxz}{z(1-x)} + \frac{n(n-1)x^2}{(1-x)^2}.$$

8. Quodsi iam aequatio proposita per s divisa ita representetur

$$0 = x(1-x)\frac{cs^2}{s} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{cs}{s} - ab,$$

substitutione perveniemus ad aequationem differentialem secundi gradus in z et x , quae erit¹⁾

$$x(1-x)\frac{cz^2}{z} = \frac{2nncxz}{z} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{cz}{z} + \frac{n(n-1)ccx^2}{1-x} - n\{c - (a+b+1)x\}cx - ab = 0,$$

9. Evidens hic est numerum n ita assumi posse, ut postrema membra minorem $1-x$ habentia per eum dividi queant, id quod evenit casu

¹⁾ In hac formula necnon in formulae paragraphi praecedentis elementa ex omittenda sunt.

$n = -a - b + c$, quo valore introducto, ut sit $s = (1-x)^{c-a-b}z$, et inter z et x hanc accipiet formam:

$$x(1-x)\partial\partial z + [c + (a+b-2c-1)x]\partial z - (c-a)(c-b)z = 0.$$

10. Quodsi iam in hac aequatione ponamus $c-a=\alpha$ et $c-b=\beta$ aequatio inter z et x sub hac forma apparebit:

$$x(1-x)\partial\partial z + [c - (\alpha + \beta + 1)x]\partial z - \alpha\beta z = 0,$$

quae a priori prorsus non differt, nisi quod loco litterarum a et b habeamus α et β . Quare cum prior aequatio differentio-differentialis ex serie

$$s = 1 + \frac{\alpha b}{1 \cdot c}x + II \frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}xx + III \frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.},$$

vicissim ex aequatione posteriore nascetur series

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot c}x + II \frac{(a+1)(\beta+1)}{2(c+1)}xx + III \frac{(a+2)(\beta+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.}$$

existente $\alpha = c-a$ et $\beta = c-b$; atque hae duae series s et z ita vicem pendent, ut sit $s = (1-x)^{c-a-b}z$ sive $\frac{s}{z} = (1-x)^{c-a-b}$.

11. Verum ex posteriore aequatione differentio-differentiali methodo eadem series pro z elici potest. Cum enim ex serie priori posito $x=0$, $s=1$, nunc autem posuerimus $z = (1-x)^{a+b-c}s$, eodem casu $x=0$ fiet $z=1$. Hoc notato pro z fingamus hanc seriem:

$$z = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.},$$

unde fit

$$\partial z = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{etc.}$$

et

$$\partial\partial z = 2B + 6Cx + 12Dx^2 + 20Ex^3 + 30Fx^4 + \text{etc.},$$

$$\begin{aligned}
& 2 B x^2 + 6 C x^3 + \text{etc.} \\
c \partial z &= A c + 2 B c x + 3 C c x^2 + 4 D c x^3 + \text{etc.} \\
+ 1) x \partial z &= (\alpha + \beta + 1) A x + 2(\alpha + \beta + 1) B x^2 + 3(\alpha + \beta + 1) C x^3 + \text{etc.} \\
\alpha \beta z &= \alpha \beta + A \alpha \beta x + B \alpha \beta x^2 + C \alpha \beta x^3 + \text{etc.} \\
x(1-x) \partial \partial z + c \partial z &= (\alpha + \beta + 1) x \partial z - \alpha \beta z = 0.
\end{aligned}$$

Singula igitur terminis ad nihilum reductis maniscemur sequentes

$$\begin{aligned}
\text{I. } & A c - \alpha \beta = 0, \\
\text{II. } & 2 B (c + 1) - (\alpha + 1)(\beta + 1) A = 0, \\
\text{III. } & 3 C (c + 2) - (\alpha + 2)(\beta + 2) B = 0, \\
\text{IV. } & 4 D (c + 3) - (\alpha + 3)(\beta + 3) C = 0, \\
\text{V. } & 5 E (c + 4) - (\alpha + 4)(\beta + 4) D = 0 \\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

Hinc igitur iidem eliciantur coefficientes, quos iam habuimus, scilicet

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\alpha \beta}{1 + c}, \\
B &= \frac{A(\alpha + 1)(\beta + 1)}{2(c + 1)}, \\
C &= \frac{B(\alpha + 2)(\beta + 2)}{3(c + 2)}, \\
D &= \frac{C(\alpha + 3)(\beta + 3)}{4(c + 3)} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

nam autem methodus, qua hanc egregiam transformationem sumus adepti, sit obliqua et per ambages longas procedat, maxime optandum esset,

ut alia methodus magis directa et naturalis detegeretur, quo utique in
 lysin haud contemnendum incrementum inferretur. Fateor autem mo haec
 in hac investigatione frustra laborasse.

14. Quoniam in his seriebus numerus factorum continuo crescit, quos
 characteres ex potestate binomiali desumptos commodius in usum vo-
 queamus, litteris a et b , perinde ac litteris α et β , valores tribuamus rati-
 onales ponendo

$$a = -f, \quad b = -g, \quad \alpha = -\zeta \quad \text{et} \quad \beta = -\eta,$$

ita ut sit

$$\zeta = -c - f \quad \text{et} \quad \eta = -c - g,$$

et iam ambae nostrae series s et z ita a se invicem pendebunt, ut sit

$$s = (1 - x)^{c+f+g} z.$$

Evolvamus nunc primo iuxta hos valores seriem priorem s , eritque

$$s = 1 + \frac{fg}{1 \cdot c} x + II \frac{(f-1)(g-1)}{2(c+1)} x^2 + III \frac{(f-2)(g-2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.}$$

similique modo posterior series erit

$$z = 1 + \frac{\xi\eta}{1 \cdot c} x + II \frac{(\xi-1)(\eta-1)}{2(c+1)} x^2 + III \frac{(\xi-2)(\eta-2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.}$$

15. Hic iam commode characteres memoratos adhibere poterimus. Deno-
 tatur igitur $\binom{m}{n}$ coefficientem termini v^n , qui ipsi convenit ex evolutione potes-
 tatis binomialis $(1+v)^m$, ita ut hoc modo habeamus

$$(1+v)^m = 1 + \binom{m}{1} v + \binom{m}{2} v^2 + \binom{m}{3} v^3 + \text{etc.}$$

Hinc igitur pro priorē nostrarum serierum fiet $\frac{f}{1} = \binom{f}{1}$; deinde $\frac{f(f-1)}{1 \cdot 2} =$
 $\frac{f(f-1)(f-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{f}{3}$ etc. sicque ista series iam concinnius ita referetur:

$$s = 1 + \frac{g}{c} \binom{f}{1} x + \frac{g}{c} \cdot \frac{g-1}{c+1} \binom{f}{2} x^2 + \frac{g}{c} \cdot \frac{g-1}{c+1} \cdot \frac{g-2}{c+2} \binom{f}{3} x^3 + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{g+c-1}{c-1}\right)\frac{g}{c} = \left(\frac{g+c-1}{c}\right); \quad \left(\frac{g+c-1}{c-1}\right)\frac{g}{c} \cdot \frac{g-1}{c+1} = \left(\frac{g+c-1}{c+1}\right),$$

no expressio porro multiplicata per $\frac{g-2}{c+2}$ dabit hunc characterem: $\left(\frac{g+c-1}{c+2}\right)$.
 s notatis nanciscimur nunc hanc seriem:

$$s\left(\frac{g+c-1}{c-1}\right) = \left(\frac{g+c-1}{c-1}\right) + \left(\frac{f}{1}\right)\left(\frac{g+c-1}{c}\right)x + \left(\frac{f}{2}\right)\left(\frac{g+c-1}{c+1}\right)x^2 \\ + \left(\frac{f}{3}\right)\left(\frac{g+c-1}{c+2}\right)x^3 + \text{etc.}$$

16. Simili modo etiam alteram seriem transformare licebit; ubi autem
 be notandum, hanc transformationem duplici modo institui posse, prouti
 tores denominatorum 1, 2, 3, 4 etc. vel cum littera ξ vel cum η coniungun-
 . Primo igitur ex praecedente serie, si ξ loco f et η loco g scribamus,
 inebimus hanc seriem:

$$z\left(\frac{\eta+c-1}{c-1}\right) = \left(\frac{\eta+c-1}{c-1}\right) + \left(\frac{\xi}{1}\right)\left(\frac{\eta+c-1}{c}\right)x + \left(\frac{\xi}{2}\right)\left(\frac{\eta+c-1}{c+1}\right)x^2 \\ + \left(\frac{\xi}{3}\right)\left(\frac{\eta+c-1}{c+2}\right)x^3 + \text{etc.}$$

autem loco f et g inverso ordine scribamus η et ξ , prodit

$$z\left(\frac{\xi+c-1}{c-1}\right) = \left(\frac{\xi+c-1}{c-1}\right) + \left(\frac{\eta}{1}\right)\left(\frac{\xi+c-1}{c}\right)x + \left(\frac{\eta}{2}\right)\left(\frac{\xi+c-1}{c+1}\right)x^2 \\ + \left(\frac{\eta}{3}\right)\left(\frac{\xi+c-1}{c+2}\right)x^3 + \text{etc.}$$

utraque autem relatio manet eadem, scilicet

$$s = (1-x)^{c+f+g}z.$$

17. Quo clarius appareat, quantopere hae duae series pro z se invicem discrepent, loco ξ et η scribamus valores assumptos, scilicet

$$\xi = -c - f \quad \text{et} \quad \eta = -c - g,$$

atque ambae posteriores series pro littera z erunt

$$z\left(\frac{-g-1}{c-1}\right) = \left(\frac{-g-1}{c-1}\right) + \left(\frac{-c-f}{1}\right)\left(\frac{-g-1}{c}\right)x + \left(\frac{-c-f}{2}\right)\left(\frac{-g-1}{c+1}\right)x^2$$

$$z\left(\frac{-f-1}{c-1}\right) = \left(\frac{-f-1}{c-1}\right) + \left(\frac{-c-g}{1}\right)\left(\frac{-f-1}{c}\right)x + \left(\frac{-c-g}{2}\right)\left(\frac{-f-1}{c+1}\right)x^2$$

18. Quo iam has series ad formam commodiorem revocemus

$$g + c - 1 = h \quad \text{et} \quad c - 1 = e,$$

ita ut sit

$$c = e + 1 \quad \text{et} \quad g = h - e;$$

hinc enim series nostra principalis erit

$$s\left(\frac{h}{e}\right) = \left(\frac{h}{e}\right) + \left(\frac{f}{1}\right)\left(\frac{h}{e+1}\right)x + \left(\frac{f}{2}\right)\left(\frac{h}{e+2}\right)x^2 + \left(\frac{f}{3}\right)\left(\frac{h}{e+3}\right)x^3$$

Binae autem sequentes series ex littera z formatae erunt

prior

$$z\left(\frac{e-h-1}{e}\right) = \left(\frac{e-h-1}{e}\right) + \left(\frac{-c-f-1}{1}\right)\left(\frac{e-h-1}{e+1}\right)x \\ + \left(\frac{-c-f-1}{2}\right)\left(\frac{e-h-1}{e+2}\right)x^2 + \text{etc.},$$

posterior

$$z\left(\frac{-f-1}{e}\right) = \left(\frac{-f-1}{e}\right) + \left(\frac{-1-h}{1}\right)\left(\frac{-f-1}{e+1}\right)x \\ + \left(\frac{-1-h}{2}\right)\left(\frac{-f-1}{e+2}\right)x^2 + \text{etc.};$$

ambae autem quantitates s et z ita a se invicem pendent, ut sit

$$s = (1-x)^{f+h+1}z.$$

$$\int \frac{i \varphi \cos. i \varphi}{(1 + aa - 2a \cos. \varphi)^{n+1}}$$

petito, cuius integrale a termino $\varphi = 0$ usque ad terminum $\varphi = 180^\circ$ prius
quidem per solam coniecturam conclusi¹⁾ esse

$$= \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{2n+1}} V$$

existente

$$V = \binom{n-i}{0} \binom{n+i}{i} + \binom{n-i}{1} \binom{n+i}{i+1} aa + \binom{n-i}{2} \binom{n+i}{i+2} a^4 + \text{etc.};$$

quo series, si cum nostra principali conforatur, ut sit

$$V = s \left(\frac{h}{c} \right),$$

praebebit

$$h = n + i \quad \text{et} \quad c = i,$$

tum vero

$$f = n - i \quad \text{et} \quad x = aa;$$

binas ergo alterae series hinc formatae erunt

prior

$$\begin{aligned} z \binom{-n-1}{i} &= \binom{-n-1}{i} + \binom{-n-1}{1} \binom{-n-1}{i+1} a^2 \\ &+ \binom{-n-1}{2} \binom{-n-1}{i+2} a^4 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

altera

$$\begin{aligned} z \binom{i-n-1}{i} &= \binom{i-n-1}{i} + \binom{-n-i-1}{1} \binom{i-n-1}{i+1} a^2 \\ &+ \binom{-n-i-1}{2} \binom{i-n-1}{i+2} a^4 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

1) Confor Commentationes indicis ENESTROEMIANI 672, 673, imprimis 674. LEONHARD EULERI Opera omnia, vol. Ito, p. XLV, 141, 168, 197. C. B.

quae series ex ipsa serie V oritur loco n scribendo $-n-1$.
 relatio inter s et z erit

$$s = (1 - aa)^{2n+1} z;$$

tum vero est

$$V = s \binom{n+i}{i}.$$

20. Cum igitur sit

$$\int \frac{\partial \varphi \cos. i \varphi}{(1 + aa - 2a \cos. \varphi)^{n+1}} = \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{2n+1}} V = \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{2n+1}} \binom{n+i}{i} s,$$

in hac forma loco n scribamus $-n-1$ sitque

$$\int \frac{\partial \varphi \cos. i \varphi}{(1 + aa - 2a \cos. \varphi)^{-n}} \left[\begin{matrix} a \varphi = 0 \\ \text{ad } \varphi = 180^\circ \end{matrix} \right] = \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{-2n-1}} U,$$

erit

$$U = \binom{-n-1}{0} \binom{-n-1+i}{i} + \binom{-n-1-i}{1} \binom{-n-1+i}{i+1} aa$$

ideoque

$$U = z \binom{i-n-1}{i} = \binom{i-n-1}{i} (1 - aa)^{-2n-1} s.$$

21. Ponamus iam

$$1 + aa - 2a \cos. \varphi = \Delta$$

et contemplemur hos duos valores integrales, quos modo sumus

$$\text{I. } \int \frac{\partial \varphi \cos. i \varphi}{\Delta^{n+1}} = \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{2n+1}} \binom{n+i}{i} s,$$

$$\text{II. } \int \Delta^n \partial \varphi \cos. i \varphi = \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{-2n-1}} \binom{i-n-1}{i} (1 - aa)^{-2n-1} s = \pi a^i$$

consequenter inter has duas formulas integrales a termino $\varphi = 0$
 $\varphi = 180^\circ$ extensas consequimur hanc relationem maxime memora-

$$\int \frac{\partial \varphi \cos. i \varphi}{\Delta^{n+1}} : \int \Delta^n \partial \varphi \cos. i \varphi = \binom{n+i}{i} : \binom{i-n-1}{i} (1 - aa)^2$$

sive erit

$$\binom{n+i}{i} (1 - aa)^{-n} \int \Delta^n \partial \varphi \cos. i \varphi = \binom{-n-1+i}{i} (1 - aa)^{n+1} \int \Delta^{-n-1}$$

22. Hoc postremum theorema iam ante aliquod tempus¹⁾ per solutionem ductionem quoque erueram, atque adeo de eius demonstratione prope desperaveram, quae nunc ex transformatione serierum allata quasi sponte obtulit; unde praestantissimus usus huius transformationis, quae meri- fundissimae indaginis est censenda, eo clarius perspicitur.

23. Cum autem nuper¹⁾ idem hoc theorema proposuissem, ratio inter binas formulas integrales aliquatenus ab hic inventa discrepare vix interim tamen perfecte consentire deprehenduntur, si modo sequens propositio in subsidium vocetur, quae generatim est

$$\left(\frac{n}{i}\right) : \left(\frac{-n-1}{i}\right) = \left(\frac{-n-1+i}{i}\right) : \left(\frac{n+i}{i}\right),$$

cuius ratio inde est manifesta, quod in genere semper est

$$\left(\frac{-a}{i}\right) = \pm \left(\frac{a+i-1}{i}\right)$$

ideoque etiam

$$\left(\frac{b}{i}\right) = \pm \left(\frac{-b-1+i}{i}\right),$$

ubi signa superiora valent, si i fuerit numerus par, inferiora vero si impar. Hinc ergo erit

$$\left(\frac{n+i}{i}\right) = \pm \left(\frac{-n-1}{i}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{-n-1+i}{i}\right) = \pm \left(\frac{n}{i}\right).$$

24. Hinc igitur nostrum theorema adhuc concinnius enunciari potest. Si ponamus brevitatis gratia

$$\frac{1+aa-2a\cos.\varphi}{1-aa} = \Theta,$$

ita ut sit

$$\Delta = (1-aa)\Theta,$$

1) Vido notam ad p. 42 adiectam. C. B.

tum ista prodibit proportio:

$$\int \theta^n \partial \varphi \cos. i \varphi : \int \theta^n \varphi \cos. i \varphi = \int \frac{\Delta^n \theta \varphi \cos. i \varphi}{(1 - aa)^n} : \int \frac{\theta^n \varphi \cos. i \varphi}{\Delta^{n+1}} \\ = \left(\frac{n+1+i}{i} \right) : \left(\frac{n+i}{i} \right) = \left(\frac{n}{i} \right) : \left(\frac{n-1}{i} \right)$$

sicque erit

$$\left(\frac{n}{i} \right) \int \theta^n \varphi \cos. i \varphi = \left(\frac{n-1}{i} \right) \int \theta^n \partial \varphi \cos. i \varphi.$$

25. Ceterum quo transformationes hic expositae facilius accommodari queant, eas sequenti theoremate complectamur.

THEOREMA

Si cognita fuerit summa huius seriei:

$$\frac{h}{e} + \binom{f}{1} \binom{h}{e+1} x + \binom{f}{2} \binom{h}{e+2} x^2 + \binom{f}{3} \binom{h}{e+3} x^3 + \dots$$

quae ponatur = S, tum etiam summae binarum sequentium se poterunt, quarum prior est ista:

$$\left(\frac{e-h-1}{e} \right) + \left(\frac{-e-f-1}{1} \right) \left(\frac{e-h-1}{e+1} \right) x + \left(\frac{-e-f-1}{2} \right) \left(\frac{e-h-1}{e+2} \right) x^2 + \dots$$

cuius summa erit

$$\left(\frac{e-h-1}{e} \right) \binom{S}{e} (1-x)^{f+h+1},$$

ubi notetur esse

$$\left(\frac{e-h-1}{e} \right) = \pm \binom{h}{e},$$

ubi signum superius valet si i numerus par, inferius si impar; unde

$$\frac{\pm S}{(1-x)^{f+h+1}}.$$

$$= \left(\begin{array}{c} f \\ e \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} h \\ e+1 \end{array} \right) (1-x)^{e+1} + \left(\begin{array}{c} f \\ e \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} h \\ e+2 \end{array} \right) (1-x)^{e+2} + \dots$$

summa erit

$$\left(\begin{array}{c} f+1 \\ e \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} h \\ e \end{array} \right) (1-x)^{e+1} + S$$

et etiam hoc modo exprimi potest:

$$1 + \left(\begin{array}{c} f+e \\ e \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} h \\ e \end{array} \right) (1-x)^{e+1} + S$$

26. Si summae harum trium serierum statuuntur ut sequitur

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} h \\ e \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} f \\ 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} h \\ e+1 \end{array} \right) x + \left(\begin{array}{c} f \\ 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} h \\ e+2 \end{array} \right) x^2 + \left(\begin{array}{c} f \\ 3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} h \\ e+3 \end{array} \right) x^3 + \text{etc.}, \\ & \left(\begin{array}{c} e-h-1 \\ e \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} e-f-1 \\ 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e-h-1 \\ e+1 \end{array} \right) x + \left(\begin{array}{c} e-f-1 \\ 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e-h-1 \\ e+2 \end{array} \right) x^2 + \text{etc.}, \\ & \left(\begin{array}{c} f-e-1 \\ e \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} h-1 \\ 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} f-e-1 \\ e+1 \end{array} \right) x + \left(\begin{array}{c} h-1 \\ 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} f-e-1 \\ e+2 \end{array} \right) x^2 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

ita inter se referuntur, ut sit

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} e-h-1 \\ e \end{array} \right) h &= \left(\begin{array}{c} h \\ e \end{array} \right) (1-x)^{e+1} 2f, \\ \left(\begin{array}{c} f-e-1 \\ e \end{array} \right) h &= \left(\begin{array}{c} h \\ e \end{array} \right) (1-x)^{e+1} e^2, \\ \left(\begin{array}{c} f-e-1 \\ e \end{array} \right) 2f &= \left(\begin{array}{c} e-h-1 \\ e \end{array} \right) e^2. \end{aligned}$$

DISQUISITIONES ANALYTICAE SUPER EVOLUTIONE POTESTATIS TRINOMIAE

$$(1 + x + xx)^n$$

Conventui exhibita die 17. Augusti 1778

Commentatio 722 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 14 (1797/98), 1805, p. 75. 1

Summarium ibidem p. 66. 67

SUMMARIVM

FEU MR. EULER a consacré ce mémoire à la recherche de plusieurs propriétés quables des coefficients de ce trinome développé. Il considère le plus grand coefficient le moyen, qu'il indique, avec ceux qui le suivent, par les lettres

p, q, r etc. pour la puissance n^{me} ,

p', q', r' etc. pour la puissance $(n+1)^{\text{me}}$,

p'', q'', r'' etc. pour la puissance $(n+2)^{\text{me}}$

et ainsi de suite, et il détermine premièrement les coefficients p, q, r etc. par l'usage au moyen du symbolisme dont il s'est servi dans ses derniers ouvrages pour les coefficients des puissances du binome; après quoi, il s'attache à déterminer la relation qui subsiste entre les coefficients du même ordre dans les puissances consécutives de savoir entre les valeurs p, p', p'' etc., et enfin la relation entre les coefficients quelconques répondans, dans les mêmes trois puissances consécutives, savoir la n^{me} , $(n+1)^{\text{me}}$ et $(n+2)^{\text{me}}$. De là, il passe à la détermination des coefficients q, r, s etc. exprimés par le seul coefficient p .

1) Confer hac cum Commentatione praeter Commentationes 326 et 551 praecedentes Commentationem 709 huiusce voluminis. C. B.

proponit $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$ etc., et la sommation des séries dont les termes se trouvent dans les diagonales consécutives parallèles à celle que forment les dits termes premiers.

1. Cum olim in *Novorum Commentariorum* tomo XI sub titulo *Observationum analyticarum*¹⁾, istam potestatem trinomialem multo studio essem perscrutatus, cum egregia symptomata incidi, quae majore attentione Geometrarum non parum videbantur. Hanc ob rem nuper²⁾ hoc idem argumentum denuo tractassepi atque nonnulla artificia analyticis usus multo plura insignia et notissima se mihi obtulerunt, quorum expositionem Geometris non ingrati fore confido.

2. Incipio igitur ab ipsa evolutione huius formulae

$$(1 + x + xx)^n,$$

pro singulis valoribus exponentis n sequentes praebet expressiones in hi subinventa representatas:

$$(1 + x + xx)^0$$

$$= 1$$

$$= 1 + x + xx$$

$$= 1 + 2x + 3xx + 2x^3 + x^4$$

$$= 1 + 3x + 6xx + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$$

$$= 1 + 4x + 10xx + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8$$

$$= 1 + 5x + 15xx + 30x^3 + 45x^4 + 51x^5 + 45x^6 + 30x^7 + 15x^8 + 5x^9 + x^{10}$$

etc.

1) Commentatio supra laudata, indicis ENESTROMIANI 326, *LEONHARDI EULERI Opera* et vol. IV, p. 50—69. C. H.

2) In Commentatione 709 supra laudata, vide p. 28 praesentis voluminis. C. H.

Hic scilicet ex qualibet potestate facillime sequens deducitur, quolibet valore exponentis n quilibet coefficientis cum binis potestatem unam summam colligatur, obtinetur coefficientis pro potestate exponentis $n + 1$ subscribenda.

3. Hanc tabulam aspicienti statim patet in qualibet coefficientes terminorum usque ad medium, qui dignitatem x^n referunt, autem iterum eodem ordine decrescere usque ad ultimum terminum x^n . Deinde etiam haud difficulter perspicitur pro potestate quocunque genere terminos initiales ita expressum iri:

$$1 + nx + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n+1)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{n(n+1)(n+10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \frac{n(n+1)(n+1)(n+2)(n+12)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \text{etc.}$$

Hos autem terminos ulterius prosequi non attinet, quia in eis nullus ordo deprehenditur.

4. Hic autem imprimis ad coefficientem maximum seu quem pro potestate $(1 + x + xx)^n$ in genere perpetuo statuimus, vero terminos hunc sequentes ita repraesentabo: qx^{n+1} , rx^{n+2} , unde termini medium praecedentes erant ordine retrogrado qx^{n-1} , tx^{n-2} etc. Deinde vero pro potestate sequenti $(1 + x + xx)^{n+1}$ apice sum notaturus, scilicet p' , q' , r' , s' etc., quas porro pro potestate sequente $(1 + x + xx)^{n+2}$ apici duplici designabo; pro sequentibus quadruplici et ita porro.

5. His praemissis, in hac dissertazione ex seriebus sumam potissimum terminos medios maximis coefficientibus affectos notaturus, qui sunt 1 , x , $3x^2$, $7x^3$, $19x^4$, $51x^5$ etc., qui iunctim summam P seriem, cuius summam littera P indicabo, ita ut

$$P = 1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 19x^4 + 51x^5 + \dots + px^n + p'x^{n+1} + \dots$$

6. Praeterea vero, quemadmodum isti termini ex tabula diagonalem sunt desumpti, simili modo tales series formantur

$$\begin{aligned}
&= x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 16x^5 + 45x^6 + \dots + qx^{n+1} + q'x^{n+2} + q''x^{n+3} + \text{etc.}, \\
&= x^4 + 3x^5 + 10x^6 + 30x^7 + \dots + rx^{n+2} + r'x^{n+3} + r''x^{n+4} + \text{etc.}, \\
&= x^6 + 4x^7 + 15x^8 + \dots + sx^{n+3} + s'x^{n+4} + s''x^{n+5} + \text{etc.}, \\
&= x^8 + 5x^9 + \dots + tx^{n+4} + t'x^{n+5} + t''x^{n+6} + \text{etc.} \\
&\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

constitutis propositum mihi est primo in valores litterarum minuscularum p, q, r, s etc. earumque derivatarum p', q', r', s' etc., p'', q'', r'', s'' etc. inquirere, quo facto etiam valores litterarum maiuscularum P, Q, R, S etc. indagabo.

INVESTIGATIO LITTERARUM p, q, r, s etc.

Cum p sit coefficientis potestatis x^n ex evolutione formulae $(1 + x + xx)^n$ hinc, istam formulam hoc modo repraesentemus:

$$(x(1+x) + 1)^n.$$

Ad hanc evolutionem utamur signandi modo iam aliquoties a me usitato, quo facientes similis potestatis binomialis per hos characteres designare soleo

$\binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \binom{n}{4}, \binom{n}{5}$ etc., ita ut sit

$$\binom{n}{1} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$\binom{n}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\binom{n}{\lambda} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda}.$$

Circa quos characteres hic annotasse iuvabit in genere semper esse

$$\binom{n}{\lambda} = \binom{n}{n-\lambda},$$

quandoquidem hi coefficientes retro eundem ordinem servant; et quia
cientes extremi sunt unitas, erit

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Deinde, quia ex lege progressionis tam omnes termini primum antea
quam termini ultimum sequentes evanescent, erit ut sequitur:

$$\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0,$$

$$\binom{n}{-2} = \binom{n}{n+2} = 0,$$

$$\binom{n}{-3} = \binom{n}{n+3} = 0$$

etc.

8. His praemissis formula nostra $(x(1+x)+1)^n$ more solito
binomium evoluta dabit hanc seriem:

$$x^n(1+x)^n + \binom{n}{1}x^{n-1}(1+x)^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}(1+x)^{n-2} + \binom{n}{3}x^{n-3}(1+x)^{n-3} + \dots$$

ubi notetur esse in genere

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \binom{k}{3}x^3 + \dots$$

Ex singulis igitur membris illius formae expositae depromi debent
potestatem x^n continentes, quippe qui coniunctim sumti component
medium px^n .

9. Primum autem membrum, $x^n(1+x)^n$, tantum terminum huius
praebet x^n . Ex membro autem secundo hanc formam habebit terminus

plus, qui est $\binom{n}{1} \binom{n-1}{1} x^n$. Ex tertio membro potestas x^n oritur ex termino tertio, qui est $\binom{n}{2} \binom{n-2}{2} x^n$. Simili modo ex membro quarto deducitur $\binom{n}{3} \binom{n-3}{3} x^n$. Ex quinto oritur $\binom{n}{4} \binom{n-4}{4} x^n$ et ita porro. Hinc igitur verus valor litterae p ita colligitur:

$$p = 1 + \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} + \binom{n}{3} \binom{n-3}{3} + \binom{n}{4} \binom{n-4}{4} + \text{etc.}$$

10. Simili modo ex eadem evolutione colligere licet coefficientes potestatis x^{n+1} , qui iunctim sumti dabunt valorem litterae q . Talis autem potestas ex primo membro orta erit $\binom{n}{1} x^{n+1}$. Ex secundo membro oritur $\binom{n}{1} \binom{n-1}{2} x^{n+1}$, ex tertio membro $\binom{n}{2} \binom{n-2}{3} x^{n+1}$, ex quarto $\binom{n}{3} \binom{n-3}{4} x^{n+1}$ et ita porro, quocirca verus valor litterae q hoc modo exprimitur:

$$q = \binom{n}{1} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{3} + \binom{n}{3} \binom{n-3}{4} + \text{etc.},$$

ubi ob analogiam primus terminus, $\binom{n}{1}$, ita repraesentatus est intelligendus $\binom{n}{0} \binom{n}{1}$. Si enim, cum quilibet terminus duobus constet factoribus, priores factores constituunt hanc seriem: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, $\binom{n}{4}$ etc., posteriores vero istam: $\binom{n-1}{1}$, $\binom{n-2}{2}$, $\binom{n-3}{3}$, $\binom{n-4}{4}$ etc.

11. Pari modo ex potestatibus x^{n+2} , quae ex singulis membris deducuntur, formabitur terminus rx^{n+2} ; at vero primum membrum pro hac potestate praebet $1 \cdot \binom{n}{2} x^{n+2}$ sive analogiae gratia $\binom{n}{0} \binom{n}{2} x^{n+2}$. Ex membro secundo oritur eadem potestas $\binom{n}{1} \binom{n-1}{3} x^{n+2}$, ex tertio membro $\binom{n}{2} \binom{n-2}{4} x^{n+2}$, ex quarto $\binom{n}{3} \binom{n-3}{5} x^{n+2}$ et ita porro; ex quibus ergo collectis nanciscimur valorem litterae r hoc modo expressum:

$$r = \binom{n}{0} \binom{n}{2} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{3} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{4} + \binom{n}{3} \binom{n-3}{5} + \text{etc.}$$

$$s = \binom{n}{0} \binom{n}{3} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{4} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{5} + \binom{n}{3} \binom{n-3}{6}$$

$$t = \binom{n}{0} \binom{n}{4} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{5} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{6} + \binom{n}{3} \binom{n-3}{7}$$

$$u = \binom{n}{0} \binom{n}{5} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{6} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{7} + \binom{n}{3} \binom{n-3}{8}$$

etc.

atque in genere, si potestati $x^{n+\lambda}$ tribuamus litteram z , erit

$$z = \binom{n}{0} \binom{n}{\lambda} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{\lambda+1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{\lambda+2} + \binom{n}{3} \binom{n-3}{\lambda+3}$$

13. Manifestum hic est omnes terminos harum serierum forma generali $\binom{n}{\alpha} \binom{n-\alpha}{\beta}$, quam observo semper huic esse aequivalentem, ita ut litterae α et β permutationem patiantur. Cum enim factum

$$\binom{n}{\alpha} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots (n-\alpha+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha}$$

et

$$\binom{n-\alpha}{\beta} = \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)(n-\alpha-2) \cdots (n-\alpha-\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \beta}$$

facta multiplicatione erit

$$\binom{n}{\alpha} \binom{n-\alpha}{\beta} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots (n-\alpha-\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \beta}$$

ubi permutabilitas litterarum α et β in oculos incurrit.

14. Quodsi iam series ante inventae hoc modo immutentur, pro p inventa nullam mutationem patitur, reliquae vero se referuntur:

$$\begin{aligned}
y &= \binom{2}{0} \binom{n}{1} + \binom{4}{1} \binom{n}{3} + \binom{6}{2} \binom{n}{5} + \binom{8}{3} \binom{n}{7} + \dots \\
r &= \binom{2}{0} \binom{n}{2} + \binom{4}{1} \binom{n}{4} + \binom{6}{2} \binom{n}{6} + \binom{8}{3} \binom{n}{8} + \dots \\
s &= \binom{3}{0} \binom{n}{3} + \binom{5}{1} \binom{n}{5} + \binom{7}{2} \binom{n}{7} + \binom{9}{3} \binom{n}{9} + \dots \\
&\dots \\
&\dots \\
z &= \binom{\lambda}{0} \binom{n}{\lambda} + \binom{\lambda+2}{1} \binom{n}{\lambda+2} + \binom{\lambda+4}{2} \binom{n}{\lambda+4} + \binom{\lambda+6}{3} \binom{n}{\lambda+6} + \dots
\end{aligned}$$

17. Notari adhuc meretur alia transformatio, quae ad calculum imprimis est accommodata. Cum enim ex prima forma si

$$z = \binom{n}{\lambda} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{\lambda+1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{\lambda+2} + \text{etc.},$$

quilibet terminus huius seriei est $\binom{n}{\alpha} \binom{n-\alpha}{\lambda+\alpha}$, qui dicatur = II , evolutione

$$II = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-\alpha+1) \dots (n-2\alpha-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \alpha \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\lambda+\alpha)}$$

Quodsi iam hic loco α scribamus $\alpha+1$, ut oriatur terminus ergo erit

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-2\alpha-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\alpha+1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\lambda+\alpha+1)},$$

hic per illum divisus praebet quotum

$$\frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}.$$

ergo erit terminus sequens

$$II. \frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}.$$

18. Quodsi ergo in hac serie more NEWTONIANO littera II denotet quem-terminum praecedentem, sequens semper erit

$$II. \frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)};$$

cum primus terminus sit $\binom{n}{\lambda}$, ubi est $\alpha = 0$, si hic designetur per II , terminus secundus

$$= II \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{(\lambda+1)};$$

si denue vocetur II , erit terminus tertius

$$= II \frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)}{2(\lambda+2)};$$

si denue vocetur II , erit terminus quartus

$$= II \frac{(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)}{3(\lambda+3)}$$

ut porro. Hoc modo nostra series pro z hanc induet formam:

$$z = \binom{n}{\lambda} + II \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1(\lambda+1)} + II \frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)}{2(\lambda+2)} \\ + II \frac{(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)}{3(\lambda+3)} + \text{etc.},$$

scilicet perpetuo II designat terminum praecedentem.

19. Hinc igitur, si loco λ successive scribamus valores 0, 1, 2, 3 etc., pro his litteris p , q , r , s etc. sequentes nanciscemur series:

$$p = 1 + P \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} + P \frac{(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2} + P \frac{(n-4)(n-5)}{3 \cdot 3} +$$

$$q = \left(\frac{n}{1}\right) + P \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + P \frac{(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3} + P \frac{(n-5)(n-6)}{3 \cdot 4} +$$

$$r = \left(\frac{n}{2}\right) + P \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 3} + P \frac{(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4} + P \frac{(n-6)(n-7)}{3 \cdot 5} +$$

$$s = \left(\frac{n}{3}\right) + P \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 4} + P \frac{(n-5)(n-6)}{2 \cdot 5} + P \frac{(n-7)(n-8)}{3 \cdot 6} +$$

etc.

20. Istaе formae ad calculum numericum imprimis sunt accommodatae, quod pro sola littera p ostendisse sufficiet. Quaeramus scilicet exempli gratia valorem ipsius p pro casu $n=6$, ac singulae eius partes sequenti modo perientur:

$$I. = 1 \quad = 1$$

$$II. = 1 \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 1} = 30$$

$$III. = 30 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 2} = 90$$

$$IV. = 90 \cdot \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 3} = 20$$

$$\text{ergo summa} = p = 141.$$

21. Simili modo quaeramus valorem ipsius p pro casu $n=7$, ac singulae partes sequenti modo colligentur:

$$\text{III.} \quad 132 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 2} = 2970$$

$$\text{IV.} \quad 2970 \cdot \frac{8 \cdot 7}{3 \cdot 3} = 18480$$

$$\text{V.} \quad 18480 \cdot \frac{6 \cdot 5}{4 \cdot 4} = 34650$$

$$\text{VI.} \quad 34650 \cdot \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 5} = 16632$$

$$\text{VII.} \quad 16632 \cdot \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 6} = 924$$

$$\text{ergo summum } p = 73789.$$

22. Mox autem trademus modum multo expeditiorem singulos terminos in seriem ex binis praecedentibus eliciendi, unde facili calculo omnes res pro litteris p, q, r etc. pro singulis exponentibus n exhiberi poterunt, ut omnes istos valores, quousque libuerit, continuare licebit. Hanc autem rationem primo seorsim pro numeris sub littera p contentis instituemus.

INVESTIGATIO RELATIONIS INTER TERNOS VALORES CONSECUTIVOS

$$p, p', p''.$$

23. Cum sit

$$p = 1 + \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} + \binom{n}{3} \binom{n-3}{3} + \text{etc.},$$

in seriei consideremus terminum quemcunque $\binom{n}{\alpha} \binom{n-\alpha}{\alpha}$, quem vocamus T_α ita ut facta evolutione sit

$$T_\alpha = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-2\alpha+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha},$$

terminum autem, qui hunc sequitur, designemus per Φ , ut sit

$$\Phi = \left(\frac{n}{\alpha+1}\right) \left(\frac{n-\alpha-1}{\alpha+1}\right)$$

ideoque facta evolutione

$$\Phi = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-2\alpha-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\alpha+1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\alpha+1)},$$

hincque ergo habebitur

$$\frac{\Phi}{\Pi} = \frac{(n-2\alpha)(n-2\alpha-1)}{(\alpha+1)(\alpha+1)} \quad \text{ideoque} \quad \Pi = \frac{(\alpha+1)(\alpha+1)\Phi}{(n-2\alpha)(n-2\alpha-1)}$$

24. Iam pro valoribus sequentibus p' et p'' designemus valores respondentes per Φ' et Φ'' ; qui quoniam oriuntur ex valore Φ , scribatur $n+1$ et $n+2$, erit facta evolutione

$$\Phi' = \frac{(n+1)n(n-1) \cdots (n-2\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\alpha+1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\alpha+1)},$$

unde patet fore

$$\Phi': \Phi = \frac{n+1}{n-2\alpha-1}$$

hincque

$$\Phi' = \frac{n+1}{n-2\alpha-1} \Phi.$$

Simili modo, si hic quoque loco n scribamus $n+1$, habebimus

$$\Phi'' = \frac{n+2}{n-2\alpha} \Phi' \quad \text{sive} \quad \Phi'' = \frac{(n+1)(n+2)\Phi}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)}.$$

25. Hinc iam formemus hanc expressionem:

$$A\Phi + \frac{B}{n+1} \Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)} \Phi'',$$

cuius ergo valor per ipsam litteram Φ ita exprimetur:

$$\Phi \left(A + \frac{B}{n-2\alpha-1} + \frac{C}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)} \right),$$

loco H valore ante dato per Φ expresso, nanciscamur sequentem aequationem per Φ divisam:

$$A + \frac{B}{n-2\alpha-1} + \frac{C}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+1)}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)},$$

a fractionibus liberata evadit

$$A(n-2\alpha-1)(n-2\alpha) + B(n-2\alpha) + C = (\alpha+1)(\alpha+1).$$

26. Cum in hac aequatione littera α ad secundam dimensionem ascendat, litterae A, B, C praecise sufficiunt, ut ex hac aequatione determinari possint. Primo igitur consequemur utrinque terminos quadratam $\alpha\alpha$ involventes, orietur ista aequatio:

$$4A\alpha\alpha - \alpha\alpha \text{ ideoque } A = \frac{1}{4}.$$

Simili modo consequemur terminos ipsam litteram α involventes, unde pervenitur ad hanc aequationem:

$$2\alpha(1-2n)A - 2\alpha B = 2\alpha,$$

III.

$$B = \frac{2n-1}{4} + \frac{2n-3}{4},$$

quo termini ab α immunes dant hanc aequationem:

$$(nn+n)A + nB + C = 1,$$

IV. reperitur

$$C = \frac{(n+2)^2}{4}.$$

27. His igitur valoribus inventis pro singulis terminis semper orit

$$A\Phi + \frac{B}{n+1}\Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\Phi'' = H.$$

Quodsi ergo hinc computemus hanc formulam:

$$Ap + \frac{B}{n+1}p' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}p'',$$

ex primis terminis pro Φ assumtis oriatur praecedens seriei p , qui est
ex secundis autem terminis pro Φ assumtis oriatur terminus primus,
est 1; ex terminis autem tertiis conficitur terminus secundus, qui
 $\left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{1}\right)$; ex terminis quartis pro Φ assumtis conficitur tertius, qui
 $\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)$; et ita porro; sicque omnes tres series hoc modo collectae
ducent hanc seriem:

$$0 + 1 + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right) + \text{etc.},$$

quae est ipsa series pro p data. Hinc habebimus inter ternas litteras p
 p' hanc aequationem:

$$Ap + \frac{B}{n+1}p' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}p'' = p.$$

28. Substituamus nunc loco litterarum A , B , C valores modo inven-
et nostra aequatio inter has ternas litteras erit

$$\frac{1}{4}p - \frac{2n+3}{4(n+1)}p' + \frac{n+2}{4(n+1)}p'' = p,$$

quae reducitur ad hanc:

$$\frac{n+2}{n+1}p'' - \frac{2n+3}{n+1}p' = 3p,$$

unde fit

$$p'' = p' + \frac{n+1}{n+2}(p' + 3p).$$

29. Hinc igitur facile pro singulis valoribus exponentis n omnes num-
littera p designati definiri poterunt, dum quilibet ex duobus praecedentibus
componitur. Ita sumto $n=0$ erit $p=1$ et $p'=1$ ideoque tertius

$$p'' = 1 + \frac{1}{2}(1 + 3 \cdot 1) = 3.$$

to $n = 2$ ob $p = 3$ et $p' = 7$ erit terminus quintus

$$p'' = 7 + \frac{3}{4}(7 + 3 \cdot 3) \dots 19,$$

mutatur $n = 3$, ob $p = 7$ et $p' = 19$ erit terminus sextus

$$p'' = 19 + \frac{4}{5}(19 + 3 \cdot 7) \dots 51,$$

30. Si hoc modo ulterius progrediamur, poterimus hanc progressionem mutare quousque libuerit, opae formae

$$p' + \frac{n+1}{n+2}(p' + 3p) \dots p'',$$

nobis suppeditat sequentes determinationes:

$$51 + \frac{5}{6} (\quad 51 + 3 \cdot 19) \dots 141,$$

$$141 + \frac{6}{7} (\quad 141 + 3 \cdot 51) \dots 393,$$

$$393 + \frac{7}{8} (\quad 393 + 3 \cdot 141) \dots 1107,$$

$$1107 + \frac{8}{9} (\quad 1107 + 3 \cdot 393) \dots 3139,$$

$$3139 + \frac{9}{10} (\quad 3139 + 3 \cdot 1107) \dots 8953,$$

$$8953 + \frac{10}{11} (\quad 8953 + 3 \cdot 3139) \dots 25653,$$

$$25653 + \frac{11}{12} (25653 + 3 \cdot 8953) \dots 73789$$

etc.

respondero assumimus litteram λ .

INVESTIGATIO RELATIONIS INTER TERNOS TERMINOS C

$$z, z', z''.$$

32. Cum sit

$$z = \binom{n}{\lambda} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{\lambda+1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{\lambda+2} + \binom{n}{3} \binom{n-3}{\lambda+3} + \dots$$

huius seriei consideremus terminum quemcunque

$$II = \binom{n}{\alpha} \binom{n-\alpha}{\lambda+\alpha},$$

cuius valor evolutus est

$$II = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-2\alpha-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\lambda+\alpha)}.$$

Terminum iam hunc sequentem

$$\binom{n}{\alpha+1} \binom{n-\alpha-1}{\lambda+\alpha+1} = \Phi$$

evolvamus, unde fit

$$\Phi = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-2\alpha-\lambda-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\alpha+1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\lambda+\alpha+1)}.$$

Hinc ergo colligimus

$$\frac{\Phi}{II} = \frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}$$

ideoque

$$II = \frac{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)\Phi}{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}.$$

33. Iam pro valoribus sequentibus z' et z'' designemus v
respondentes per Φ' et Φ'' ; qui quoniam oriuntur ex valore
scribatur $(n+1)$ et $(n+2)$, erit facta evolutione

$$\Phi = \frac{n-2\alpha-\lambda-1}{n-2\alpha-\lambda-1} \Phi$$

ut

$$\Phi' = \frac{(n+1)\Phi}{n-2\alpha-\lambda-1},$$

aque modo erit

$$\Phi'' = \frac{n+2}{n-2\alpha-\lambda} \Phi' = \frac{(n+2)(n+1)\Phi}{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}.$$

41. Hinc prorsus ut supra formemus hanc expressionem:

$$A\Phi + \frac{B}{n+1}\Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\Phi'',$$

valor per Φ ita exprimitur:

$$\Phi \left(A + \frac{B}{n-2\alpha-\lambda-1} + \frac{C}{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)} \right),$$

erum litteras A , B , C ita definiri oportet, ut formula aequalis evadat termino precedenti H . Substituto igitur loco H valore suo per Φ expressamur sequentem aequationem a fractionibus iam liberatam:

$$2\alpha-\lambda-1)(n-2\alpha-\lambda) + B(n-2\alpha-\lambda) + C + (\alpha+1)(\alpha+\lambda+1).$$

45. Facta igitur evolutione et conequatis primo utrinque terminis $\alpha\alpha$ entibus prodit haec aequatio pro determinatione litterae A :

$$4\alpha\alpha A - \alpha\alpha \text{ ideoque } A = \frac{1}{4}.$$

n modo si conequentur termini simplicem litteram α involventes, poritur ad sequentem aequationem:

$$(4\alpha\lambda - 4n\alpha + 2\alpha)A + 2\alpha B + (\lambda+2)\alpha,$$

Denique coaequatis terminis ab α liberis prodit aequatio

$$\frac{nn - 2n\lambda - n + \lambda\lambda + \lambda}{4} - \frac{(n - \lambda)(2n + 3)}{4} + C = \lambda + 1,$$

unde fit

$$C = \frac{(n + 2)^2}{4} - \frac{\lambda\lambda}{4}.$$

36. His igitur valoribus inventis pro singulis terminis som

$$A\Phi + \frac{B}{n+1}\Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\Phi'' = H.$$

Quodsi igitur hinc computemus istam formulam:

$$Az + \frac{B}{n+1}z' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}z'',$$

ex primis terminis pro Φ assumtis orietur praecedens series z , et secundis autem terminis pro Φ' assumtis orietur terminus primus, tertiis terminis conficitur terminus secundus $\left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{\lambda+1}\right)$; ex quibus pro Φ'' assumtis conficitur tertius, qui est $\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{\lambda+2}\right)$, et ita porro lectis oritur ipsa series pro z data

$$z = \left(\frac{n}{\lambda}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{\lambda+1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{\lambda+2}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-3}{\lambda+3}\right) + \dots$$

Relatio igitur inter z , z' , z'' erit

$$Az + \frac{B}{n+1}z' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}z'' = z.$$

37. Substituamus nunc loco litterarum A , B , C valores in
et aequatio inter has ternas litteras erit

$$\frac{1}{4} z = \frac{2n+3}{4(n+1)} z' + \frac{(n+2)^2 - \lambda\lambda}{4(n+2)(n+1)} z'' = z,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{(n+2)^2 - \lambda\lambda}{(n+2)(n+1)} z'' = \frac{2n+3}{n+1} z' + 3z,$$

unde colligitur

$$z'' = \frac{n+2}{(n+2)^2 - \lambda\lambda} ((2n+3)z' + 3(n+1)z).$$

38. Tribuamus nunc litterae λ successive valores 0, 1, 2, 3, 4 etc. reperiemus sequentes relationes pro singulis litteris:

$$\frac{(n+2)^2 - 0^2}{(n+2)(n+1)} p'' = \frac{2n+3}{n+1} p' + 3p,$$

$$\frac{(n+2)^2 - 1^2}{(n+2)(n+1)} q'' = \frac{2n+3}{n+1} q' + 3q,$$

$$\frac{(n+2)^2 - 2^2}{(n+2)(n+1)} r'' = \frac{2n+3}{n+1} r' + 3r,$$

$$\frac{(n+2)^2 - 3^2}{(n+2)(n+1)} s'' = \frac{2n+3}{n+1} s' + 3s.$$

etc.

39. Cum igitur pro littera q habeamus hanc aequationem:

$$q'' = \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} ((2n+3)q' + 3(n+1)q),$$

casu $n=0$ erit $q=0$ et $q'=1$, unde fit

$$q'' = \frac{2}{3} (3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = 2.$$

Nunc pro $n=1$ ob $q=1$ et $q'=2$ erit

$$q'' = \frac{3}{2 \cdot 4} (5 \cdot 2 + 6 \cdot 1) = 6.$$

Iam sumto $n = 3$ ob $q = 6$ et $q' = 16$ erit

$$q'' = \frac{5}{4 \cdot 6} (9 \cdot 16 + 12 \cdot 6) = 45.$$

At casu $n = 4$ ob $q = 16$ et $q' = 45$ erit

$$q'' = \frac{6}{5 \cdot 7} (11 \cdot 45 + 15 \cdot 16) = 126.$$

40. Hic autem calculus multo laboriosior et taediosior est quam cedens pro valoribus litterae p expositus. Verum alia methodus multo facilius inde derivari poterit, qua omnes litteras q, r, s [etc.] per solam litteram p suis derivatis p', p'' [etc.] determinare licebit; tum enim, postquam series valorum p iam satis longe fuerit computata, inde etiam valores litterarum r, s etc. multo leviori labore colligi poterant, id quod in sequenti articulo ostendemus.

DETERMINATIO LITTERARUM q, r, s, t etc. PER SOLAM PRIMAM p SUI DERIVATIS

41. Posito brevitate gratia nostro trinomio

$$1 + x + xx = X$$

eius binas potestates X^n et X^{n+1} evolutas ita disponamus, ut pares potestates ipsius x sibi invicem subscriptae appareant, hoc modo:

$$X^n = 1 + nx + \dots + qx^{n-1} + px^n + qx^{n+1} + rx^{n+2} + sx^{n+3} + \text{etc.}$$

$$X^{n+1} = 1 + (n+1)x + \dots + r'x^{n-1} + q'x^n + p'x^{n+1} + q'x^{n+2} + r'x^{n+3} + \text{etc.}$$

quo facto supra iam notavimus quemlibet coefficientem inferioris seriei a superiori cum binis praecedentibus.

42. Per hanc igitur legem sequentes nanciscemur aequalitates:

$$p' = q + p + q = 2q + p,$$

$$q' = r + q + p,$$

$$r' = s + r + q$$

etc.,

unde colligimus sequentes determinationes:

$$q = \frac{p' - p}{2}, \quad r = q' - q - p, \quad s = r' - r - q, \quad t = s' - s - r \text{ etc.}$$

43. Manifestum est hic formulam $p' - p$ exprimere incrementum quantitatis p , dum exponens n unitate augetur, quod cum per Δp exprimi soleat, aequalitates inventae sequenti modo succinctius exhiberi poterunt:

$$q = \frac{1}{2} \Delta p \quad \text{sive} \quad 2q = \Delta p, \quad 2r = 2\Delta q - 2p, \quad 2s = 2\Delta r - 2q \text{ etc.}$$

44. Charactero autem hoc differentiali Δ in usum vocato, cum sit

$$2q = \Delta p, \quad \text{erit} \quad 2\Delta q = \Delta \Delta p$$

ideoque

$$2r = \Delta \Delta p - 2p \quad \text{hincque} \quad 2\Delta r = \Delta^2 p - 2\Delta p,$$

quo porro fit

$$2s = \Delta^2 p - 3\Delta p \quad \text{ideoque} \quad 2\Delta s = \Delta^3 p - 3\Delta \Delta p,$$

ergo

$$2t = \Delta^3 p - 4\Delta \Delta p + 2p \quad \text{ideoque} \quad 2\Delta t = \Delta^4 p - 4\Delta^2 p + 2\Delta p.$$

hinc porro fit

$$2u = \Delta^4 p - 5\Delta^2 p + 5\Delta p \quad \text{ideoque} \quad 2\Delta u = \Delta^5 p - 5\Delta^3 p + 5\Delta \Delta p,$$

45. Quodsi hos coefficientes numericos attentius consideremus, progressionis convenire deprehenditur cum serie Geometris satis nota valore z , cui ordinis index positus est λ , obtinebimus sequentem

$$2z = A^1 p - \lambda A^{\lambda-2} p + \frac{\lambda(\lambda-3)}{1 \cdot 2} A^{\lambda-4} p - \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{\lambda-6} p \\ + \frac{\lambda(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A^{\lambda-8} p - \frac{\lambda(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda-8)(\lambda-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} A^{\lambda-10} p$$

quam seriem eo usque tantum continuari oportet, quamdiu indices non evadunt negativi. Ita si sumamus $\lambda = 6$, quo casu fit $z = v$, erit generalis utique prodit

$$2v = A^6 p - 6 A^4 p + 9 A^2 p - 2p.$$

46. Quo indoles huius seriei clarius perspiciatur, meminisse oportet formam

$$\frac{(x + \sqrt{xx-4})^n}{2^n} + \frac{(x - \sqrt{xx-4})^n}{2^n}$$

in sequentem seriem resolvit:

$$x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-6} + \text{etc.}$$

Hoc igitur modo nostro scopo iam est satisfactum, cum omnes indices s, t etc. per solam primam p suasque derivatas p', p'', p''' etc. obtinerimus.

47. Cum sit per tertiam formam supra [§ 16] expositam

$$p = 1 + \binom{2}{1} \binom{n}{2} + \binom{4}{2} \binom{n}{4} + \binom{6}{3} \binom{n}{6} + \text{etc.},$$

libet terminus in genere erit $\binom{2\alpha}{\alpha} \binom{n}{2\alpha}$, quem excipit iste sequens: $\binom{2\alpha+2}{\alpha+1} \binom{n}{2\alpha+2}$.
 m igitur facta evolutione sit

$$\binom{2\alpha}{\alpha} = \frac{2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\cdots(\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha}$$

alique modo

$$\binom{2\alpha+2}{\alpha+1} = \frac{(2\alpha+2)(2\alpha+1)2\alpha\cdots(\alpha+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\alpha+1)}$$

ec posterior forma per priorem divisa dat quatum

$$\frac{(2\alpha+2)(2\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} = \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha+1},$$

quo erit

$$\binom{2\alpha+2}{\alpha+1} = \frac{4\alpha+2}{\alpha+1} \binom{2\alpha}{\alpha}.$$

48. Hac ergo reductione adhibita sumto

$$\alpha = 1 \quad \text{erit} \quad \binom{4}{2} = \frac{6}{2} \binom{2}{1};$$

nto

$$\alpha = 2 \quad \text{erit} \quad \binom{6}{3} = \frac{10}{3} \binom{4}{2} = \frac{10}{3} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{1};$$

$$\alpha = 3, \quad \text{fit} \quad \binom{8}{4} = \frac{14}{4} \binom{6}{3} = \frac{14}{4} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{1};$$

n si

$$\alpha = 4, \quad \text{fiet} \quad \binom{10}{5} = \frac{18}{5} \binom{8}{4} = \frac{18}{5} \cdot \frac{14}{4} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{1}$$

$$+ \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \binom{n}{10} + \text{etc.}$$

49. Nunc igitur videamus, quomodo formam finitam in-
gari oporteat, cuius integrale intra datos terminos inclusum
seriem perducatur. Hunc in finem contemplari conveniet
 $(1+x)^n$, quippe cuius evolutio praebet hanc seriem:

$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}xx + \binom{n}{3}x^3 + \text{etc.},$$

cuius termini alterni iam continent characteres nostros litte-

50. Hanc igitur seriem in duas partes discerpamus scilicet
alternos ac ponamus

$$M = 1 + \binom{n}{2}xx + \binom{n}{4}x^4 + \binom{n}{6}x^6 + \text{etc.}$$

$$N = \binom{n}{1}x + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{5}x^5 + \binom{n}{7}x^7 + \text{etc.}$$

ita ut sit

$$(1+x)^n = M + N.$$

Nunc autem inquiramus, quomodo seriem priorem, M , per
formas tractari oporteat, ut ipsa series proposita seu valor
oriatur.

51. Ad hoc efficiendum ducamus quantitatem M in
differentiale ∂v cuiuspiam functionis ipsius x , atque sequente
determinemus, ut intra certos terminos, veluti ab $x=a$ usque
cludantur, quas conditiones ita comparatas esse oportet, ut
conditionibus satisfiat:

$$1. \int x x \partial v = \frac{2}{1} v,$$

$$2. \int x^4 \partial v = \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 2} v,$$

$$3. \int x^6 \partial v = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} v,$$

$$4. \int x^8 \partial v = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v$$

etc.;

hoc enim modo integrale $\int M \partial v$ producet hanc seriem:

$$v + \frac{2}{1} \left(\frac{n}{2} \right) v + \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 2} \left(\frac{n}{4} \right) v + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{n}{6} \right) v + \text{etc.},$$

ita ut hoc modo id quod quaerimus nanciscamur,

$$p = \frac{\int M \partial v}{v}.$$

52. Formularum igitur integralium, quas hic exposuimus, quaelibet a praecedente pendet, ut sit

$$\int x x \partial v = \frac{2}{1} \int \partial v,$$

$$\int x^4 \partial v = \frac{6}{2} \int x x \partial v,$$

$$\int x^6 \partial v = \frac{10}{3} \int x^4 \partial v,$$

$$\int x^8 \partial v = \frac{14}{4} \int x^6 \partial v$$

etc.

sicque in genere effici debet, ut fiat

$$\int x^{2m} \partial v = \frac{4m-2}{m} \int x^{2m-2} \partial v.$$

53. Cum igitur pro his terminis integrationis esse debeat

$$m \int x^{2m} \partial v = (4m - 2) \int x^{2m-2} \partial v,$$

ponamus esse generatim

$$m \int x^{2m} \partial v = (4m - 2) \int x^{2m-2} \partial v + Hx^{2m-1},$$

ubi scilicet H eiusmodi sit functio, ut pars subnexa x^{2m-1} utroque tam $x = a$ quam $x = b$ in nihilum abeat. Haec iam aequatio differ per x^{2m-2} divisa dat

$$m x \partial v = (4m - 2) \partial v + (2m - 1) H \partial x + x \partial H,$$

quae aequatio subsistere debet pro omnibus numeris m .

54. Hinc igitur ista aequatio in duas discerpi debet, quarum contineat solos terminos littera m affectos, altera vero reliquos, quarum aequationes erunt

$$x x \partial v = 4 \partial v + 2 H \partial x$$

et

$$0 = -2 \partial v - H \partial x + x \partial H.$$

Ex priori fit

$$\partial v = \frac{2 H \partial x}{x x - 4};$$

ex altera vero fit

$$\partial v = \frac{x \partial H - H \partial x}{2},$$

qui ambo valores inter se coaequati praebent hanc aequationem:

$$4 H \partial x = (x x - 4) (x \partial H - H \partial x) = x^2 \partial H - x x H \partial x - 4 x \partial H + 4$$

aque colligitur

$$\frac{\partial \Pi}{\Pi} = \frac{x \partial x}{xx - 4},$$

de integrando fit

$$\ell \Pi = \ell \sqrt{xx - 4}$$

oque

$$\Pi = C \sqrt{xx - 4}$$

etiam

$$\Pi = C \sqrt{4 - xx};$$

o valore invento assequimur nostrum differentiale assumtum

$$\partial v = \frac{2C \partial x}{\sqrt{4 - xx}},$$

de fit

$$v = 2CA \sin. \frac{x}{2}.$$

55. Consideremus nunc formulam suffixam

$$\Pi x^{2m-1} = C x^{2m-1} \sqrt{4 - xx},$$

amprehendimus triplici modo in nihilum abire posse: primo scilicet, quando $x = 0$, casu excepto quo $m = 0$; secundo, casu quo $x = 2$; ac tertio, casu quo $x = -2$, ex quibus ergo binos terminos illos a et b desumi oportet. Quia autem hos binos terminos eligi conveniunt, ut etiam altera integrationis, $\int N \partial v$, commodè exprimatur. Quia enim posuimus

$$(1 + x)^n = M + N,$$

am ad integrale $\int N \partial v$ est respiciendum, quod si penitus evanesceret, pro terminis integrationis sine dubio id esset commodissimum, tum enim foret

$$\int (M + N) \partial v$$

e

$$\int \partial v (1 + x)^n = \int M \partial v,$$

sequeuter haberemus $p = \frac{\int M \partial v}{v}$.

unde conficitur

$$\int N \partial v = \left(\frac{n}{1}\right) \int x \partial v + \left(\frac{n}{3}\right) \int x^3 \partial v + \left(\frac{n}{5}\right) \int x^5 \partial v + \text{etc.},$$

ubi per easdem reductiones, quas pro littera M instituimus, quod integralis ad praecedentem ope reductionis

$$\int x^{2m} \partial v = \frac{4m-2}{m} \int x^{2m-2} \partial v$$

reduci potest. Sumto enim $m = \frac{3}{2}$ erit

$$\int x^3 \partial v = \frac{8}{3} \int x \partial v.$$

Sumto $m = \frac{5}{2}$ erit

$$\int x^5 \partial v = \frac{16}{5} \int x^3 \partial v.$$

Sumto $m = \frac{7}{2}$ erit

$$\int x^7 \partial v = \frac{24}{7} \int x^5 \partial v$$

etc.,

unde patet, si modo $\int x \partial v$ evanesceret, etiam sequentia omnia 088

57. Quoniam igitur invenimus

$$\partial v = \frac{2Cx}{V(4-xx)},$$

erit

$$x \partial v = \frac{2Cvx}{V(4-xx)}$$

hincque

$$\int x \partial v = 2CV\sqrt{4-xx},$$

ae expressio binis casibus vel $x = +2$ vel $x = -2$ evanescit. Quamobrem terminos integrationis constituamus $x = 2$ et $x = -2$, non solum partes ne subnexae Πx^{2m-1} , verum etiam totus valor integralis $\int N \partial v$ evanescet, que adeo hoc casu quaesito nostro perfecte satisfacimus, cum sit

$$p = \int \frac{\partial v (1+x)^n}{v}.$$

58. Cum igitur invenerimus

$$\partial v = \frac{2C \partial x}{V(4-xx)},$$

is integrale ita sumtum, ut evanescat posito $x = 2$, erit

$$v = 2C A \sin \frac{x}{2} - 2C \frac{\pi}{2},$$

ae expressio reducitur ad hanc:

$$v = -2C A \cos \frac{x}{2};$$

de hoc integrali usque ad alterum terminum $x = -2$ extenso prodit $v = -2C\pi$. His igitur valoribus substitutis erit formula quaesita

$$p = -\frac{1}{\pi} \int \frac{(1+x)^n \partial x}{V(4-xx)}.$$

hec scilicet formula integralis a termino $x = 2$ usque ad terminum $x = -2$ extensa verum praebebit valorem ipsius p .

59. Quo hanc formulam concinniores reddamus, statuamus $x = 2 \cos \varphi$, cui evidens est casu $x = 2$ fieri angulum $\varphi = 0$; casu vero $x = -2$ fieri $\varphi = \pi$, ita ut hoc angulo introducto integrale capi debeat a termino $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = \pi$; tum vero erit

$$\partial x = -2 \partial \varphi \sin \varphi \quad \text{et} \quad \sqrt{4-xx} = 2 \sin \varphi,$$

ae substitutione facta nanciscemur hanc aequationem:

$$p = + \frac{1}{\pi} \int (1 + 2 \cos \varphi)^n \partial \varphi \left[\begin{smallmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = \pi \end{smallmatrix} \right].$$

DETERMINATIO RELIQUARUM LITTERARUM PER FORMULAS INTEGRALES

60. Hoc facile praestari poterit per relationes, quas supra inter-
teras tradidimus. Primo scilicet habuimus $2q = Ap = p' - p$, ubi
ex p , si loco n scribatur $n + 1$. Quoniam igitur modo invenimus

$$p = \frac{1}{\pi} \int (1 + 2 \cos \varphi)^n \partial \varphi,$$

erit

$$p' = \frac{1}{\pi} \int (1 + 2 \cos \varphi)^{n+1} \partial \varphi,$$

hincque ergo erit

$$p' - p = \frac{2}{\pi} \int \cos \varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n \partial \varphi,$$

quo valore substituto reperietur

$$q = \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi \cos \varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n \left[\begin{matrix} n & \varphi = 0 \\ \text{et} & \varphi = \pi \end{matrix} \right];$$

hinc ergo porro erit

$$q' = \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi \cos \varphi (1 + 2 \cos \varphi)^{n+1}.$$

61. Supra autem vidimus esse $r = q' - q - p$, nunc vero erit.

$$q' - q = \frac{2}{\pi} \int \partial \varphi \cos \varphi^3 (1 + 2 \cos \varphi)^n.$$

Hinc ergo si subtrahatur p , ob $2 \cos \varphi^3 - 1 = \cos 2\varphi$ elicimus litteram

$$r = \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi \cos 2\varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n,$$

unde iterum fit

$$r' = \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi \cos 2\varphi (1 + 2 \cos \varphi)^{n+1}.$$

62. Quoniam igitur supra invenimus $s = r' - r - q$, habebimus hic

$$r' - r = \frac{2}{\pi} \int \partial \varphi \cos \varphi \cos 2\varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n.$$

Hinc ergo si subtrahatur q , ob $2 \cos \varphi \cos 2\varphi - \cos \varphi = \cos 3\varphi$ erit

$$s = \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi \cos 3\varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n.$$

Simili modo iam evidens est fore

$$t = \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi \cos 4\varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n;$$

eodemque modo reperietur fore

$$u = \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi \cos 5\varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n;$$

atque adeo in genere orit

$$z = \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi \cos \lambda \varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n.$$

63. Quoniam Analysis, qua hic usi sumus, prorsus est singularis et consueta, haud abs re erit veritatem harum formularum demonstrationem analytica muniri, quam de singulis uno quasi labore sequenti modo instituere licebit. Inchoandum erit ab evolutione formulae $(1 + 2 \cos \varphi)^n$, quae ad hanc seriem:

$$1 + \binom{n}{1} 2 \cos \varphi + \binom{n}{2} 4 \cos^2 \varphi + \binom{n}{3} 8 \cos^3 \varphi + \binom{n}{4} 16 \cos^4 \varphi + \dots$$

Per notas autem angulorum reductiones¹⁾ constat fore

1) Vido e. g. Commentationem 246 indicis ENESTROEMIANI, § 6, Corollarium 3. *EULERI Opera omnia*, vol. II, p. 549. C. B.

igitur soli termini absoluti relinquuntur; tum vero integrali rite sumto erit $\int \partial \varphi = \pi$, quo observato erit nostrum integrale

$$\int \partial \varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n = \pi + 2 \left(\frac{n}{2} \right) \pi + 6 \left(\frac{n}{4} \right) \pi + 20 \left(\frac{n}{6} \right) \pi + \text{etc.}$$

quodsi hic forma generalis supra data consulatur, hi coefficientes numerici evocentur ad formas $\left(\frac{2}{1} \right)$, $\left(\frac{4}{2} \right)$, $\left(\frac{6}{3} \right)$ etc., prorsus uti veritas formulae postulatur. Erit enim

$$p = \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n = 1 + \left(\frac{2}{1} \right) \left(\frac{n}{2} \right) + \left(\frac{4}{2} \right) \left(\frac{n}{4} \right) + \left(\frac{6}{3} \right) \left(\frac{n}{6} \right) + \text{etc.}$$

66. Pergamus ad secundam litteram, q , ubi superiorem seriem per $\varphi \cos \varphi$ multiplicari et integrari oportet. Ad hoc observetur esse in genere

$$\int \partial \varphi \cos \varphi \cos m \varphi = \frac{1}{2(m+1)} \sin(m+1)\varphi + \frac{1}{2(m-1)} \sin(m-1)\varphi,$$

uae expressio posito $\varphi = \pi$ in nihilum abit, solo casu excepto quo $m = 1$, nipppe quo fit

$$\int \partial \varphi \cos \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

ex quo intelligitur ex superiori serie alios terminos hic non in computum venire, nisi qui contineant $\cos \varphi$, qui sunt

$$2 \left(\frac{n}{1} \right) \cos \varphi + 2 \left(\frac{3}{1} \right) \left(\frac{n}{3} \right) \cos \varphi + 2 \left(\frac{5}{2} \right) \left(\frac{n}{5} \right) \cos \varphi + 2 \left(\frac{7}{3} \right) \left(\frac{n}{7} \right) \cos \varphi + \text{etc.}$$

hi autem termini ducti in $\partial \varphi \cos \varphi$ et integrati, ob

$$\int 2 \partial \varphi \cos \varphi^2 = \pi$$

erunt per π divisi ipsum valorem

$$q = \left(\frac{n}{1} \right) + \left(\frac{3}{1} \right) \left(\frac{n}{3} \right) + \left(\frac{5}{2} \right) \left(\frac{n}{5} \right) + \left(\frac{7}{3} \right) \left(\frac{n}{7} \right) + \text{etc.}$$

69. Quodsi iam hanc aequationem per $2\varphi \cos \lambda\varphi$ multiplicemus et integremus, omnia haec integralia terminis praescriptis inclusa evanescent excepto membro $2 \cos \lambda\varphi (\dots)$, propterea quod productum $2 \cos \lambda\varphi^2$ contineat partem absolutam, unde per integrationem oritur π , ita ut sit

$$\int 2\varphi \cos \lambda\varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n = \pi \left(\binom{n}{\lambda} + \binom{\lambda+2}{1} \binom{n}{\lambda+2} + \binom{\lambda+4}{2} \binom{n}{\lambda+4} + \text{etc.} \right),$$

qui valor per π divisus ipsum valorem ipsius z supra inventum praebet; unde veritas harum novarum expressionum luculenter est demonstrata.

70. Ceterum, si singulas series paragraphi penultimi vel leviter consideremus, deprehendimus eas ipsis litteris nostris p, q, r, s etc. esse aequales ita ut nunc sit

$$(1 + 2 \cos \varphi)^n = p + 2q \cos \varphi + 2r \cos 2\varphi + 2s \cos 3\varphi + 2t \cos 4\varphi + \text{etc.},$$

ubi simul ratio est manifestata, cur litterae q, r, s etc. duplicentur, quippe quae in hoc est posita, quod in evolutione formulae $(1 + x + xx)^n$ littera x semel tantum in medio, reliquae vero litterae bis, a medio aequidistantes occurrant. Ex quo haec egregia affinitas inter illas binas potestates $(1 + x + xx)^n$ et $(1 + 2 \cos \varphi)^n$ summa attentione digna est censenda.

INVESTIGATIO SUMMAE SERIEI

$$P = 1 + x + 3xx + 7x^2 + 19x^3 + \dots + px^n + p'x^{n+1} + p''x^{n+2} + \text{etc.}$$

71. Quoniam huius seriei terminus generalis est px^n , quem sequuntur $p'x^{n+1}$ et $p''x^{n+2}$, inter has ternas quantitates p, p', p'' invenimus supra (§ 38) hanc relationem:

$$(n+2)p'' = (2n+3)p' + 3(n+1)p,$$

quam hoc modo ad usum nostrum accommodatam referamus:

$$3(n+1)p + (n+1)p' + (n+2)p' - (n+2)p'' = 0.$$

eiusmodi operationes instituamus, quibus relatio modo allata obtineat
 quod sequenti modo commodissime fiet:

$$\begin{aligned} \frac{3\partial Px}{\partial x} &= 3 + 6x + 27xx + \dots + 3(n+1)p'x^n + \text{etc.}, \\ + \frac{\partial P}{\partial x} &= 1 + 6x + 21xx + \dots + (n+1)p'x^n + \text{etc.}, \\ + \frac{\partial Px}{x\partial x} &= \frac{1}{x} + 2 + 9x + 28xx + \dots + (n+2)p'x^n + \text{etc.}, \\ - \frac{\partial P}{x\partial x} &= -\frac{1}{x} - 6 - 21x - 76xx - \dots - (n+2)p''x^n - \text{etc.} \end{aligned}$$

Colligantur iam hae quatuor series in unam summam, atque obtineat
 sequentem aequationem:

$$\frac{3\partial Px}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Px}{x\partial x} - \frac{\partial P}{x\partial x} = 0,$$

quandoquidem omnes termini se mutuo destruunt.

73. Hoc ergo modo deducti sumus ad aequationem finitam differentii
 primi gradus, quae per $x\partial x$ multiplicata et in ordinem reducta ita se habet

$$P\partial x(3x+1) + \partial P(3xx+2x-1) = 0,$$

unde ergo fit

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{3x(1+3x)}{1-2x-3xx},$$

quae aequatio integrata praebet

$$lP = -\frac{1}{2}l(1-2x-3xx) + lC,$$

consequenter

$$P = \frac{C}{V(1-2x-3xx)}.$$

ad constantem C determinandam notetur tantum nostram seriem pro-
 priam casu $x = 0$ praeberet $P = 1$, unde patet sumi debere $C = 1$, ita ut sit
 nostra serie

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - 3xx}}.$$

74. Praeter ergo expectationem pertigimus ad summam algebraicam, quae
 expressio etiam ita est comparata, ut in seriem conversa ipsam nostram
 omnino reproducat, id quod ostendisse operae erit pretium. Cum igitur sit

$$P = (1 - 2x - 3xx)^{-\frac{1}{2}},$$

huius trinomii partes posteriores coniunctim spectentur, evolutio nobis dabit

$$P = 1 + \frac{1}{2}(2x + 3xx) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(2x + 3xx)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}(2x + 3xx)^3 + \text{etc.},$$

quod sufficit ad potestatem tantum tertiam usque evolvisse. Hoc modo
 procedimus

$$\begin{aligned} P &= 1 + x + \frac{3}{2}xx + \frac{9}{2}x^3 + \text{etc.} \\ &\quad + \frac{3}{2}xx + \frac{5}{2}x^3 + \text{etc.} \\ &= 1 + x + 3xx + 7x^3 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

quod igitur perfecte congruit.

75. At vero haec eadem summa adhuc alio modo investigari potest, ex
 formula scilicet integrali, quam pro valore litterae p invenimus

$$p = \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n \left[\begin{smallmatrix} u \varphi = 0 \\ ad \varphi = \pi \end{smallmatrix} \right].$$

Si enim formula, sumto $n = 0$, per x multiplicata dat terminum secundum, x ;
 porro $n = 2$, per xx multiplicata dat terminum tertium, $3xx$; quo obser-
 vata summa quaesita ita poterit repraesentari:

$$= \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi (1 + x(1 + 2 \cos \varphi) + xx(1 + 2 \cos \varphi)^2 + x^3(1 + 2 \cos \varphi)^3 + \text{etc.}),$$

ubi probe est observandum in hac integratione quantitatem x tantum spectari, siquidem solus angulus φ est variabilis.

76. Evidens autem est seriem infinitam, in quam elementum dx oportet, esse geometricam, cuius ergo summa erit

$$\frac{1}{1-x(1+2\cos\varphi)} = \frac{1}{1-x-2x\cos\varphi},$$

sicque adeo pro P iam habemus hanc expressionem finitam:

$$P = \frac{1}{\pi} \int \frac{\partial\varphi}{1-x-2x\cos\varphi} \left[\begin{array}{l} \text{a } \varphi=0 \\ \text{ad } \varphi=\pi \end{array} \right],$$

quae aequatio ita poterit exhiberi:

$$P = \frac{1}{\pi(1-x)} \int \frac{\partial\varphi}{1-\frac{2x}{1-x}\cos\varphi} \left[\begin{array}{l} \text{a } \varphi=0 \\ \text{ad } \varphi=\pi \end{array} \right],$$

ubi iam brevitatis gratia statuamus $\frac{2x}{1-x} = k$, ut habeamus

$$P = \frac{1}{\pi(1-x)} \int \frac{\partial\varphi}{1-k\cos\varphi}.$$

77. Constat autem huius formulae $\frac{\partial\varphi}{1+n\cos\varphi}$ integrale esse

$$\frac{1}{V(1-nn)} \Lambda \cos \frac{\cos\varphi+n}{1+n\cos\varphi};$$

unde, si loco n scribamus $-k$, adipiscimur pro nostro casu

$$P = \frac{1}{\pi(1-x)V(1-kk)} \Lambda \cos \frac{\cos\varphi-k}{1-k\cos\varphi},$$

ubi constantis additione non est opus, quia haec expressio casu φ evanescit. Faciamus igitur pro altero termino $\varphi = \pi$, unde fit

$$\cos\varphi = -1 \quad \text{et} \quad \Lambda \cos \frac{\cos\varphi-k}{1-k\cos\varphi} = \Lambda \cos -1 = \pi;$$

habebimus

$$P = \frac{1}{(1-x)\sqrt{(1-kk)}},$$

expressio, ob $k = \frac{2x}{1-x}$, abit in hanc:

$$P = \frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}},$$

ut ante.

Cum sit

$$1-2x-3xx = (1-x)^2 - 4xx = (1+x)(1-3x),$$

et seriem nostram summendam duobus casibus fieri infinite magnam, scilicet primo casu quo $x = -1$, altero vero quo $x = \frac{1}{3}$. Tum vero nostra series summam finitam, quando x continetur intra hos limites: -1 et $\frac{1}{3}$, cum x extra hos limites accipitur, tum summa semper erit imaginaria. Cum $x = \frac{1}{4}$ habebitur haec summatio:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{7}{4^3} + \frac{19}{4^4} + \frac{51}{4^5} + \frac{141}{4^6} + \text{etc.} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

INVESTIGATIO SUMMAE RELIQUARUM SERIERUM Q , R , S etc.

SUPRA § 6 EXPOSITARUM

Incipiamus a serie Q , quae est

$$Q = xx + 2x^3 + 6x^4 + \dots + qx^{n+1} + q'x^{n+2} + q''x^{n+3} + \text{etc.},$$

primus terminus, xx , ex potestate $n = 1$ oritur; ubi, porinde ac si seriem Q inchoare volumus, praefigi debet terminus $0x$. Pro hac autem serie posuimus supra esse $q = \frac{1}{2}(p' - p)$, unde huius seriei summa ex serie p sequenti modo elici poterit.

$$P = 1 + x + 3xx + \dots + px^n + p'x^{n+1} + \text{etc.},$$

erit

$$Px = x + xx + \dots + px^{n+1} + \text{etc.},$$

quae posterior series a priori subtracta relinquit

$$P(1-x) = 1 + 2xx + \dots + (p' - p)x^{n+1} + \text{etc.}$$

Quare cum sit $p' - p = 2q$, erit

$$P(1-x) = 1 + 2Q;$$

sicque innotescit huius seriei summa, cum sit

$$Q = \frac{P(1-x) - 1}{2}.$$

Modo ante autem vidimus esse

$$P = \frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}},$$

sicque habebimus

$$Q = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3xx}}{2\sqrt{1-2x-3xx}}.$$

81. Procedamus ad seriem R , quae ita se habebat:

$$R = x^4 + 3x^5 + 10x^6 + \dots + rx^{n+2} + r'x^{n+3} + \text{etc.},$$

cuius primus terminus, x^4 , ex potestate $n=2$ est ortus, unde praefigendi sunt bini termini $0x^3 + 0x^4$, ad cuius summam inveniendam esse $r = q' - q - p$. Hinc, si sequentes operationes instituantur:

$$\begin{aligned} Q &= xx + 2x^3 + \dots + qx^{n+1} + q'x^{n+2} + \text{etc.}, \\ - Qx &= \quad \quad \quad x^3 - \dots - \quad \quad - qx^{n+2} - \text{etc.}, \\ - Px^2 &= -xx - \quad x^3 - \dots - \quad \quad - px^{n+2} - \text{etc.}, \end{aligned}$$

$$Q(1-x) - Pxx = x^4 + 3x^5 + \dots + (q' - q - p)x^{n+2} + \text{etc.} = R.^1)$$

82. Hoc igitur modo summam R determinavimus per binas series cedentes Q et P , quae cum iam sint cognitae, etiam summam seriei R braice per certam functionem ipsius x expressam sumus adepti, quae quoad commode evolvi queat, deinceps ostendemus.

83. Pro serie S , quae ita erat proposita:

$$S = x^6 + 4x^7 + 15x^8 + \dots + sx^{n+3} + s'x^{n+4} + \text{etc.},$$

ei tres termini evanescentes praefigi sunt censendi, scilicet $0x^3 + 0x^4 +$ siquidem a potestate $n=0$ incipere volumus. Supra autem invenimus $s = r' - r - q$, unde sequentes operationes instituiamus:

$$\begin{aligned} R &= x^4 + 3x^5 + 10x^6 + \dots + rx^{n+3} + r'x^{n+4} + \text{etc.}, \\ - Rx &= - x^5 - 3x^6 - \dots - r x^{n+3} - \text{etc.}, \\ - Qxx &= - x^4 - 2x^5 - 6x^6 - \dots - q x^{n+3} - \text{etc.}, \end{aligned}$$

quibus tribus seriebus collectis oritur haec series:

$$x^6 + \dots + sx^{n+3} + \text{etc.},$$

quae est ipsa series S . Quocirca summa huius seriei per binas praecedentes Q et R ita determinatur, ut sit

$$S = R(1-x) - Qxx,$$

cuius evolutio etiam satis simpliciter expediri poterit, uti mox ostendemus.

1) Editio princeps:

$$Q(1-x) - Pxx = (q' - q - p)x^{n+2} = R.$$

C. I.

$$\begin{aligned}
S &= x^6 + 4x^7 + 15x^8 + \dots + sx^{n+3} + s'x^{n+4} + \text{etc.}, \\
-Sx &= -x^7 - 4x^8 - \dots - s x^{n+4} - \text{etc.}, \\
-Rxx &= -x^8 - 3x^9 - 10x^{10} - \dots - rx^{n+4} - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Cum igitur $s' - s - r = t$, hae tres series collectae dabunt

$$S(1 - x) - Rxx = x^6 + \dots + tx^{n+4} + \text{etc.},$$

quae cum sit ipsa series T , erit

$$T = S(1 - x) - Rxx.$$

85. Hinc igitur manifestum est singulas harum serierum satis simpliciter per binas praecedentes determinari posse atque adeo per legem ponitur formem. Eas coniunctim ob oculos ponamus.

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{P(1-x)-1}{2}, \\
R &= Q(1-x) - Pxx, \\
S &= R(1-x) - Qxx, \\
T &= S(1-x) - Rxx, \\
U &= T(1-x) - Sxx \\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

unde patet omnes has summas secundum seriem recurrentem procedere, scala relationis est $(1-x)$, $-xx$. Verum mox patebit hanc seriem adeo geometricam.

86. Ad hoc ostendendum, cum facta evolutione sit

$$\frac{Q}{P} = \frac{1-x - \sqrt{1-2x-3xx}}{2},$$

eamus $Q = Pv$; inde autem sublata irrationalitate, cum sit

$$V(1-x) = 2x + 3xx + 1 = x + 2v,$$

hæc æquatio:

$$(1-x)^2 = 4xx + (1-x)^2 = 4v(1-x) + 4vv,$$

reducitur ad istam:

$$v(1-x) = xx + vv,$$

probe notasse invidet.

Iam pro serie R , si loco Q hunc valorem Pv substituamus, orietur æquatio:

$$R = P(v(1-x) + xx)$$

et per relationem modo notatam

$$R = Pvv,$$

porro loco Q et R valores inventos scribamus, nunciscuntur simili modo

$$S = Pv + (v(1-x) + xx) = Pv^2,$$

$$T = Pvv + (v(1-x) + xx) = Pv^3,$$

$$U = Pv^2 + (v(1-x) + xx) = Pv^4,$$

$$V = Pv^3 + (v(1-x) + xx) = Pv^5,$$

$$W = Pv^4 + (v(1-x) + xx) = Pv^6,$$

$$X = Pv^5 + (v(1-x) + xx) = Pv^{6+1},$$

88. Quodsi iam has determinationes ad formulas integrales, litteris p, q, r etc. invenimus, transferamus, quoniam invenimus

$$z = \frac{1}{\pi} \int \partial \varphi \cos \lambda \varphi (1 + 2 \cos \varphi)^n,$$

si exponenti n successive valores tribuamus 0, 1, 2, 3, 4 etc., quia a potestate x^i inchoare est censenda, formula differentialis $\partial \varphi \cos \lambda \varphi$ seriem geometricam multiplicari debet:

$$(1 + 2 \cos \varphi)^0 x^i + (1 + 2 \cos \varphi)^1 x^{i+1} + (1 + 2 \cos \varphi)^2 x^{i+2} + \text{etc.}$$

cuius summa est

$$\frac{x^i}{1 - x - 2x \cos \varphi},$$

qua ergo in calculum introducta summa quaesita Z ita exprimetur

$$Z = \frac{1}{\pi} \int \frac{x^i \partial \varphi \cos \lambda \varphi}{1 - x - 2x \cos \varphi} \left[\begin{array}{l} \text{a } \varphi = 0 \\ \text{ad } \varphi = \pi \end{array} \right],$$

ubi quantitas x est constans.

89. Quoniam igitur hic invenimus istam summam, scilicet

$$Z = Pv^i = \frac{v^i}{V(1 - 2x - 3xx)}$$

existente

$$v = \frac{1 - x - V(1 - 2x - 3xx)}{2},$$

nunc huius ipsius formulae integralis valorem adeo algebraicum poterimus, quandoquidem nunc novimus esse

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{x^i \partial \varphi \cos \lambda \varphi}{1 - x - 2x \cos \varphi} = \frac{v^i}{V(1 - 2x - 3xx)},$$

sive multiplicando per $\frac{\pi}{x^i}$ habebimus

$$\int \frac{\partial \varphi \cos \lambda \varphi}{1 - x - 2x \cos \varphi} = \frac{\pi}{V(1 - 2x - 3xx)} \left(\frac{v}{x} \right)^i.$$

90. Quoniam haec integratio maiori attentione digna videtur, eam in commodiorem formam transfundamus et, quoniam x et v hic ut constantes constantur, ponamus $\frac{v}{x} = b$, atque ob

$$v = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3xx}}{2}$$

$$2bx = 1-x-\sqrt{1-2x-3xx},$$

aequatio sublata irrationalitate praebet

$$4bbxx - 4bx(1-x) + (1-x)^2 = (1-x)^2 - 4xx,$$

aequatio reducitur ad hanc:

$$bbx - b + bx = -x,$$

de ipsa quantitas x satis commode determinatur, cum fiat $x = \frac{b}{bb+b+1}$ loque

$$1-x = \frac{bb+1}{bb+b+1},$$

aeque porro, cum esset

$$\sqrt{1-2x-3xx} = 1-x-2bx,$$

t nunc

$$\sqrt{1-2x-3xx} = \frac{1-bb}{1+b+bb}.$$

91. Quodsi ergo loco quantitatis x litteram b in nostrum calculum introcamus, integratio inventa ad hanc formam reducetur simpliciore:

$$\int \frac{\partial \varphi \cos \lambda \varphi}{1-2b \cos \varphi + bb} \left[\begin{matrix} a \varphi = 0 \\ ad \varphi = \pi \end{matrix} \right] = \frac{\pi b^2}{1-bb},$$

us veritas ex calculis hactenus expeditis est deducta; verum etiam immediate et directo demonstrari potest, quo ipso praecedentia omnia eo magis corroborabuntur.

92. Ad hoc igitur demonstrandum in subsidium vocemus integrationem, qua est

$$\int \frac{\partial \varphi}{\alpha + \beta \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}} A \cos \frac{\alpha \cos \varphi + \beta}{\alpha + \beta \cos \varphi}.$$

Fiat nunc $\alpha = 1 + bb$ et $\beta = -2b$ et habebimus

$$\int \frac{\partial \varphi}{1 - 2b \cos \varphi + bb} = \frac{1}{1 - bb} A \cos \frac{(1 + bb) \cos \varphi - 2b}{1 - 2b \cos \varphi + bb},$$

quod integrale iam evanescit posito $\varphi = 0$. Posito ergo pro $\varphi = \pi$ hoc integrale evadet $\frac{\pi}{1 - bb}$.

93. Quoniam igitur pro nostris terminis integrationis invenimus

$$\int \frac{\partial \varphi}{1 - 2b \cos \varphi + bb} = \frac{\pi}{1 - bb}$$

atque manifesto est

$$\int \partial \varphi = \pi \quad \text{ideoque} \quad \int \frac{\partial \varphi (1 - 2b \cos \varphi + bb)}{1 - 2b \cos \varphi + bb} = \pi,$$

hanc formam in duas partes distribuendo habebimus

$$\pi = (1 + bb) \int \frac{\partial \varphi}{1 - 2b \cos \varphi + bb} - 2b \int \frac{\partial \varphi \cos \varphi}{1 - 2b \cos \varphi + bb},$$

unde colligimus

$$\int \frac{\partial \varphi \cos \varphi}{1 - 2b \cos \varphi + bb} = \frac{\pi b}{1 - bb}.$$

94. Quoniam pro nostris terminis integrationis in genere

$$\int \partial \varphi \cos i \varphi = 0,$$

siquidem i fuerit numerus integer, multiplicemus hanc formulam infra per $1 + bb - 2b \cos \varphi$ atque obtinebimus

$$\int \frac{\partial \varphi ((1 + bb) \cos i \varphi - b \cos (i - 1) \varphi - b \cos (i + 1) \varphi)}{1 + bb - 2b \cos \varphi} = 0.$$

DEMONSTRATIO INSIGNIS THEOREMATIS NUMERICI CIRCA UN POTESTATUM BINOMIALIUM¹⁾

Conventui exhibita die 17. Septembris 1778

Commentatio 726 indicis ENESTROMMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 15 (1799/1802), 1806, p. 333--

Summarium ibidem p. 95—96

SUMMARIUM

En développant la puissance p du binôme $1 + x$, le coefficient du terme x^n est, comme tout le monde sait, $\frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \dots \frac{p-n+1}{n}$. Pour désigner ce coefficient

Mr. EULER a introduit dans l'analyse le caractère $\left(\frac{p}{q}\right)$. On sait donc ce que

chez lui les caractères

$$\left(\frac{m}{0}\right), \left(\frac{m}{1}\right), \left(\frac{m}{2}\right), \left(\frac{n}{c}\right), \left(\frac{n}{c+1}\right), \left(\frac{n}{c+2}\right) \text{ etc.}$$

En faisant usage de ces caractères dans l'acceptation indiquée, le théorème dont on

ici la démonstration porte que

$$\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{n}{c}\right) + \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{n}{c+1}\right) + \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{c+2}\right) + \text{etc.} = \left(\frac{m+n}{m+c}\right) = \left(\frac{m+n}{n-c}\right).$$

L'immortel auteur avait déjà démontré cette vérité pour les cas où m est un nombre positif. Ici, il fait voir que cette égalité a lieu dans tous les cas, et que m et n peuvent être des nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

1) Confer hae cum dissertatione Commentationes iam laudatas in nota 1 ad p. 100. C. B.

1. Si iste character $\binom{p}{q}$ designet coefficientem potestatis x^q , qui ex evolutione binomii $(1+x)^p$ oritur, ita ut sit

$$\binom{p}{q} = \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{p-q+1}{q},$$

ita pridem ostendi¹⁾, summam huiusmodi productorum

$$\binom{m}{0} \binom{n}{c} + \binom{m}{1} \binom{n}{c+1} + \binom{m}{2} \binom{n}{c+2} + \text{etc.}$$

per hac formula exprimi

$$\binom{m+n}{m+c} = \binom{m+n}{n-c},$$

indiquidem hi duo characteres sunt inter se aequales, quia in genere est

$$\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q}.$$

2. Hoc elegans theorema tum temporis deduxi ex casibus specialibus, quibus erat primo $m=1$, unde fit

$$1 \binom{n}{c} + 1 \binom{n}{c+1} = \binom{1+n}{n-c} = \binom{1+n}{1+c}.$$

unde sumpto $m=2$ etiam haud difficulter perspicitur esse

$$1 \binom{n}{c} + 2 \binom{n}{c+1} + 1 \binom{n}{c+2} = \binom{2+n}{2+c}.$$

si autem $m=3$ habebitur

$$1 \binom{n}{c} + 3 \binom{n}{c+1} + 3 \binom{n}{c+2} + 1 \binom{n}{c+3} = \binom{3+n}{3+c}.$$

1) Vido Commentationem 575 indicis ENESTROEMIANI conventui academias Petropolitanae habitam die 13. Maii 1776; LEONHARDI EULERI Opera omnia vol. I16, p. 528—568, imprimis p. 550.

Ex quibus casibus conclusio generalis satis tuto est deducta, ita ut strationi rigidae aequivalens sit censenda.

3. Interim tamen istud ratiocinium non nisi ad casus, quibus numerus integer positivus, extendi potest, etiamsi veritas multo latius atque adeo ad omnes plane valores litterae m extendi deprehendatur etiamnunc pro hoc theoremate demonstratio completa desideratur, quae veritas pro omnibus casibus, sive litterae m et n denotent numero positivos sive negativos sive integros sive fractos, ostendatur. Talem demonstrationem hic sum traditurus.

LEMMA

4. *Si formula*

$$\frac{x^p}{(1-x)^{q+1}}$$

in seriem evolvatur secundum potestates ipsius x procedentem, tum in hac potestatis x^n coefficientis erit $\binom{n-p+q}{q}$.

Cum enim sit

$$(1-x)^{-q-1} = 1 + \binom{q+1}{1}x + \binom{q+2}{2}xx + \binom{q+3}{3}x^3 + \binom{q+4}{4}x^4 + \text{etc.}$$

in genere potestatis x^l coefficientis erit $\binom{q+l}{l}$, qui ergo etiam erit coefficientis potestatis x^{p+l} ex evolutione formulae $\frac{x^p}{(1-x)^{q+1}}$ resultantis. Fiat nunc $p+l$ sive $l = n-p$, atque coefficientis potestatis x^n erit $\binom{n-p+q}{n-p} = \binom{n-p+q}{q}$

5. Hoc lemmate praemisso consideremus hanc expressionem:

$$\frac{z^p}{(1-z)^{q+1}} \left(1 + \frac{z}{1-z}\right)^n = V,$$

qua, cum more solito fiat

$$(1 + \frac{z}{1-z})^m = 1 + \binom{m}{1} \frac{z}{1-z} + \binom{m}{2} \frac{z^2}{(1-z)^2} + \binom{m}{3} \frac{z^3}{(1-z)^3} + \text{etc.},$$

t per seriem

$$V = \frac{z^c}{(1-z)^{c+1}} + \binom{m}{1} \frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+2}} + \binom{m}{2} \frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+3}} + \binom{m}{3} \frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+4}} + \text{etc.},$$

primo termino praefigi potest character $\left(\frac{m}{0}\right)$. Concipiantur nunc singula membra huius seriei more solito in series evoluta et ex singulis colligantur termini potestate z^n affecti, atque per lemma praemissum ex primo membro $p=c$ et $q=c$, coefficientis huius potestatis z^n ipsius erit $= \binom{m}{0} \binom{n}{c}$. Deinde ex secundo membro, ob $p=c+1$ et $q=c+1$, erit [potestatis] z^n coefficientis $= \binom{m}{1} \binom{n}{c+1}$. Simili modo ex tertio membro nascitur potestatis z^n coefficientis $= \binom{m}{2} \binom{n}{c+2}$ sicque porro. Hinc manifestum est ex tota forma V huius potestatis z^n coefficientem esse proditum

$$= \binom{m}{0} \binom{n}{c} + \binom{m}{1} \binom{n}{c+1} + \binom{m}{2} \binom{n}{c+2} + \text{etc.},$$

om brevitatis gratia littera C indicemus, haecque est ea ipsa progressio cuius summa demonstranda est aequari huic characteri $\binom{m+n}{m+c}$.

6. Hoc autem facile ostendetur, si modo observemus esse

$$1 + \frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

igitur forma nostra erit

$$V = \frac{z^c}{(1-z)^{m+c+1}},$$

cuius evolutione potestatis z^n coefficientis, ob $p=c$ et $q=m+c$, elicetur

$$= \binom{m+n}{m+c} = \binom{m+n}{n-c}.$$

$$\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{n}{c}\right) + \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{n}{c+1}\right) + \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{c+2}\right) + \text{etc.} =$$

quae est demonstratio maxime rigorosa nostri theorema
semper subsistit, quicumque numeri litteris m et n tribu-

7. Casus hic singularis, quo $m = 0$ et potestas $(1 +$
est in $l\left(1 + \frac{z}{1-z}\right)$, peculiarem evolutionem postulat. Cu

$$V = \frac{z^c}{(1-z)^{c+1}} l\left(1 + \frac{z}{1-z}\right),$$

ob

$$l\left(1 + \frac{z}{1-z}\right) = \frac{z}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{(1-z)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^3}{(1-z)^3} - \frac{1}{4}$$

erit

$$V = \frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+4}} - \frac{1}{4} \cdot$$

8. Hinc iam, ut supra fecimus, investigemus coeffic
atque ex primo membro is prodit $= \binom{n}{c+1}$; ex secu
 $-\frac{1}{2} \cdot \binom{n}{c+2}$, ex tertio membro $\frac{1}{3} \cdot \binom{n}{c+3}$, ex quarto $-\frac{1}{4}$
sicque totus coefficiens potestatis z^n ex evolutione expr

$$\binom{n}{c+1} - \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{c+2} + \frac{1}{3} \cdot \binom{n}{c+3} - \frac{1}{4} \cdot \binom{n}{c+4} + \frac{1}{5} \cdot$$

9. Cum vero per transformationem sit

$$l\left(1 + \frac{z}{1-z}\right) = l \frac{1}{1-z} = -l(1-z),$$

erit quoque

$$V = -\frac{z^c l(1-z)}{(1-z)^{c+1}}.$$

are cum sit

$$-l(1-z) = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 + \text{etc.},$$

it

$$V = \frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+1}} + \text{etc.},$$

cuius evolutione propterea si quaeratur coëfficiens potestatis z^n , is illi, eodem modo ante invenimus, aequalis esse debet.

10. Nunc vero per lemma praemissum primum membrum pro hoc coëfficiente praebet $\left(\frac{n-1}{c}\right)$; secundum membrum autem dat $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n-2}{c}\right)$, tertium $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n-3}{c}\right)$ et ita porro, ita ut hinc totus coëfficiens potestatis z^n sit

$$C = \left(\frac{n-1}{c}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n-2}{c}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n-3}{c}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n-4}{c}\right) + \text{etc.}$$

11. Hinc igitur adepti sumus sequentem aequationem inter binas progressionem inventas, quandoquidem semper erit

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n}{c+1}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{c+2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n}{c+3}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n}{c+4}\right) + \text{etc.} \\ & = \left(\frac{n-1}{c}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n-2}{c}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n-3}{c}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n-4}{c}\right) + \text{etc.}, \end{aligned}$$

ut duae progressionem debent esse inter se aequales, quicunque valores seriei n et c tribuantur, cuius veritatis nonnullos casus perpendisse iuvabit.

CASUS I, QUO $c = 0$

12. Hoc ergo casu prior series evadet

$$\left(\frac{n}{1}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n}{3}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n}{4}\right) + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{n}{5}\right) - \text{etc.},$$

$$\binom{n-1}{0} + \frac{1}{2} \cdot \binom{n-2}{0} + \frac{1}{3} \cdot \binom{n-3}{0} + \frac{1}{4} \cdot \binom{n-4}{0} + \frac{1}{5} \cdot \binom{n-5}{0} + \dots$$

Ubi notandum est, omnium harum formularum $\binom{n-k}{0}$ valorem quandiu k non excedit n , hancque adeo seriem tantum usque ad $\binom{n-n}{0}$ esse continuandam, hocque modo posterior series ita est repræ-

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}.$$

13. Hinc ergo nacti sumus sequentem æquationem maxime notandam

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} - \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2} + \frac{1}{3} \cdot \binom{n}{3} - \frac{1}{4} \cdot \binom{n}{4} + \frac{1}{5} \cdot \binom{n}{5} - \dots + \frac{1}{n} \cdot \binom{n}{n} \\ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

cuius veritatem aliquot exemplis ostendamus.

14. Sit 1^o. $n = 1$; fiet prior series $\binom{1}{1} = 1$, altera vero pariter

2^o. Sit $n = 2$; et, ob $\binom{2}{1} = 2$ et $\binom{2}{2} = 1$, erit prior series $= 2$ - posterior vero series dat $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

3^o. Sit $n = 3$; ob $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$ prior series dat $3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ - posterior vero series præbet $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

4^o. Si $n = 4$, ob $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$ et $\binom{4}{4} = 1$ prior series dat $4 - \frac{6}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; altera vero series dat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ - valor est æqualis, ob $1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

5^o. Si $n = 5$, ob $\binom{n}{1} = 5$, $\binom{n}{2} = 10$, $\binom{n}{3} = 10$, $\binom{n}{4} = 5$ et $\binom{n}{5} = 1$ erit
 prior series $5 - \frac{10}{2} + \frac{10}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5}$; posterior vero dat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$,
 valores calculo instituto accurate evadunt aequales.

Simili modo erit quoque

$$6 - \frac{15}{2} + \frac{20}{3} - \frac{15}{4} + \frac{6}{5} - \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}.$$

et erit

$$7 - \frac{21}{2} + \frac{35}{3} - \frac{35}{4} + \frac{21}{5} - \frac{7}{6} + \frac{1}{7} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7};$$

quibus enim terminis subtractis remanet

$$6 - 11 + 11\frac{1}{3} - 9 + 4 - 1\frac{1}{3} = 0.$$

CASUS II, QUO $c = 1$

15. Hoc casu erit prior series

$$\binom{n}{2} - \frac{1}{2}\binom{n}{3} + \frac{1}{3}\binom{n}{4} - \frac{1}{4}\binom{n}{5} + \frac{1}{5}\binom{n}{6} - \text{etc.};$$

posterior vero fit

$$\binom{n-1}{1} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{1} + \frac{1}{3}\binom{n-3}{1} + \frac{1}{4}\binom{n-4}{1} + \text{etc.},$$

quae in has duas resolvitur

$$\begin{aligned} & \frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \frac{n}{5} + \text{etc.}, \\ & - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - \text{etc.}, \end{aligned}$$

ut eo usque sunt continuandae, quoad superiores termini unitate fiant mi-
 nores; huic ergo expressioni prior series semper erit aequalis.

16. Sit 1^o $n = 1$; ac prior series tota evanescit, quod etiam in posteriore
 erit.

- 2°. Sit $n = 2$; ac prior series dat 1, posterior vero dat $1 + 0$.
 3°. Si $n = 3$, prior series dat $3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$, posterior vero ser
 4°. Si $n = 4$, prior series praebet $6 - \frac{4}{2} + \frac{1}{3}$, posterior vero se
 5°. Si $n = 5$, prior series dat $10 - \frac{10}{2} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4}$, posterior
 $4 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$.

CASUS III, QUO $c = 2$

17. Hoc ergo casu prior series orit

$$\binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{4} + \frac{1}{3}\binom{n}{5} - \frac{1}{4}\binom{n}{6} + \frac{1}{5}\binom{n}{7} - \text{etc.},$$

posterior vero series praebet

$$\binom{n-1}{2} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{2} + \frac{1}{3}\binom{n-3}{2} + \frac{1}{4}\binom{n-4}{2} + \text{etc.}$$

Hic iam, quamdiu $n < 3$, omnes termini prioris seriei abeunt in nihil, etiam in altera usu venire deprehenditur. Tantum autem hic unice quo $n = 6$, evolamus; quo casu prior series evadit $20 - \frac{15}{2} + \frac{6}{3} - \frac{1}{4}$, posterior vero series dat $10 + \frac{6}{2} + \frac{3}{3} + \frac{1}{4}$.

NOTA

18. In serie posteriore, quae erat

$$\binom{n-1}{c} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{c} + \frac{1}{3}\binom{n-3}{c} + \frac{1}{4}\binom{n-4}{c} + \text{etc.},$$

dubium videri potest, quod ea tantum usque ad terminum $\frac{1}{n}\binom{n-1}{c}$ debeat, cum tamen sequentes termini, in quibus superior numerus, non evanescant. Verum hic observandum est in his characterum inferiorem immediate ex analysi ortum conversum esse in supplementum, siquidem ex forma generali $\frac{z^n}{(1-z)^{p+1}}$ coefficientis ipsius z^n est $\binom{n-p+q}{n-p}$, cuius loco scripsimus $\binom{n-p+q}{q}$ vi aequationis $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)$.

robore observandum est talem conversionem non valere, nisi superior numerus sit positivus, quemadmodum hactenus assumimus; unde si etiam ad numeros negativos nostras progressionem extendere velimus, in serie saltem posteriori in singulis characteribus complementa inferiorum numerorum seribebunt, hocque modo posterior progressio ita est repraesentanda:

$$\binom{n-1}{n-1-c} + \frac{1}{2} \binom{n-2}{n-2-c} + \frac{1}{3} \binom{n-3}{n-3-c} + \frac{1}{4} \binom{n-4}{n-4-c} + \text{etc.}$$

Hic probe noletur omnes terminos, ubi inferiores numeri sunt negativi, per nihil esse habendos. Ita postremo casu, quo erat $n = 6$ et $c = 2$, haec progressio erit.

$$\binom{5}{3} + \frac{1}{2} \binom{4}{2} + \frac{1}{3} \binom{3}{1} + \frac{1}{4} \binom{2}{0} + \frac{1}{5} \binom{1}{-1} + \text{etc.}$$

Hic ergo omnes termini post $\binom{2}{0}$ sequentes evanescent. Hoc autem observatum nostras expressiones ad valores negativos ipsius c extendere licet.

CASUS IV, QUO $c = -1$

19. Hoc casu prior progressio erit.

$$\binom{n}{0} - \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} - \frac{1}{4} \binom{n}{3} + \frac{1}{5} \binom{n}{4} - \text{etc.},$$

altera vero progressio nunc ita se habebit.

$$\binom{n}{n-1} + \frac{1}{2} \binom{n}{n-2} + \frac{1}{3} \binom{n}{n-3} + \frac{1}{4} \binom{n}{n-4} + \frac{1}{5} \binom{n}{n-5} + \text{etc.},$$

ius series prioris termini omnes evanescent, donec superiores numeri evadant negativi; tum vero sequentium terminorum ii tantum significantur habebunt quibus numerus inferior adhuc est positivus vel 0; generatim enim omnes termini characteres, simul ac numeri inferiores evadant negativi, semper evanescent.

20. Hinc ergo intelligitur, ex progressionē posteriore unicam relinqui, qui erit $\frac{1}{n+1} \binom{-1}{0}$, cuius valor est $+\frac{1}{n+1}$, cui ergo progressio semper est aequalis.

1°. Si enim ponamus $n=1$, prior progressio dat $1 - \frac{1}{2}$, posterior dat etiam $\frac{1}{2}$.

2°. Si $n=2$, prior series dat $1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, posterior vero etiam $\frac{1}{3}$.

3°. Si $n=3$, erit $1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Similique modo porro habebitur

$$1 - \frac{4}{2} + \frac{6}{3} - \frac{4}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5},$$

$$1 - \frac{5}{2} + \frac{10}{3} - \frac{10}{4} + \frac{5}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

etc.

CASUS V, QUO $c = -2$

21. Prior progressio erit

$$\binom{n}{-1} - \frac{1}{2} \binom{n}{0} + \frac{1}{3} \binom{n}{1} - \frac{1}{4} \binom{n}{2} + \frac{1}{5} \binom{n}{3} - \text{etc.},$$

ubi primus terminus evanescit; posterior vero series erit

$$\binom{n-1}{n+1} + \frac{1}{2} \binom{n-2}{n} + \frac{1}{3} \binom{n-3}{n-1} + \frac{1}{4} \binom{n-4}{n-2} + \text{etc.},$$

cuius terminus generalis est $\frac{1}{\lambda} \binom{n-\lambda}{n-\lambda+2}$. Ille igitur ab initio omnes terminos evanescunt, donec fiat $\lambda = n+1$, unde terminus fit $\frac{1}{n+1} \binom{-1}{1} = -\frac{1}{n+1}$, sequitur terminus $\frac{1}{n+2} \binom{-2}{0}$, qui adhuc valorem dat $\frac{1}{n+2}$; sequuntur omnes iterum evanescunt, ita ut tota posterior series contrahatur terminos:

$$-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)},$$

qui ergo est valor seriei prioris.

$$\frac{1}{2} \binom{1}{0} + \frac{1}{3} \binom{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \dots = \frac{1}{6}.$$

°. Si $n = 2$, habebitur

$$\frac{1}{2} \binom{2}{0} + \frac{1}{3} \binom{2}{1} + \frac{1}{4} \binom{2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \dots = \frac{1}{3 \cdot 4}.$$

°. Si $n = 3$, erit

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \dots = \frac{1}{4 \cdot 5}.$$

[CASUS VI, QUO $c = -3$]

3. Hic ergo prior progressio erit

$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{0} = \frac{1}{4} \binom{n}{1} + \frac{1}{5} \binom{n}{2} = \frac{1}{6} \binom{n}{3} + \text{etc.},$$

quo priores termini in nihilum abeunt. Pro posteriore vero serie, cuius forma generalis est $\frac{1}{\lambda} \binom{n}{\lambda+1}$, primus terminus significatum habens est $\frac{1}{2} \binom{n}{1} = \frac{n}{2} + 1$; sequens autem terminus erit $\frac{1}{n+2} \binom{n+2}{1} = \frac{n+2}{n+2}$; denique sequens $\frac{1}{n+3} \binom{n+3}{0} = \frac{1}{n+3}$; reliqui vero omnes evanescunt, ita ut summa prioris serie futura sit

$$\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

4. Ut rem exemplis illustremus, sit

°. $n = 0$, quo casu summa debet¹⁾ esse $\frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$, ipsa vero progressio

$$\binom{0}{0} = \frac{1}{3}.$$

¹⁾ Editio princeps: dabit. C. B.

2^o. Casu $n = 1$ fit summa $\frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$, ipsa vero progressio
 $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{0} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} \right) = \frac{1}{12}$.

3^o. Casu $n = 2$ fit summa $\frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{30}$, ipsa autem progressio
 $\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$.

Eodem modo habebimus

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} = \frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6},$$

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{4} + \frac{6}{5} - \frac{4}{6} + \frac{1}{7} = \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7},$$

$$\frac{1}{3} - \frac{5}{4} + \frac{10}{5} - \frac{10}{6} + \frac{5}{7} - \frac{1}{8} = \frac{2}{6 \cdot 7 \cdot 8}.$$

25. Superfluum foret haec ulterius prosequi. Hinc enim satis
 fuerit $c = -4$, posteriorem progressionem, atque adeo summam
 turam esse

$$-\frac{1}{n+1} + \frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+3} + \frac{1}{n+4} = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Prior vero series omissis terminis nihilo aequalibus erit

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{n}{0} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{n}{1} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{n}{2} \right) + \frac{1}{7} \left(\frac{n}{3} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{n}{4} \right) + \text{etc.}$$

DE SUMMATIONE SERIERUM IN HAC FORMA CONTENTARUM)

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^6}{36} + \text{etc.}$$

Convntui exhibita die 31. Maii 1779

Commentatio 736 indicis ENESTRÖMIANI

Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Petersbourg B (1809/10), 1811, p. 26 - 42

. Ex his, quae olim primus de summatione potestatum reciprocarum in
m attuli), duo tantum casus derivari possunt, quibus summam seriei
oppositae assignare licet: alter scilicet, quo $a = 1$, ubi ostendi huius seriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$$

um esse $= \frac{\pi^2}{6}$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$;
vero casus est, quo $a = -1$; tum enim mutatis signis huius seriei

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{etc.}$$

) Confer hac cum dissertatione Commentationes 20, 41, 61, 63, 130, 597; *LEONHARDI EULERI
omnia*, vol. 114 et 118. C. B.

) Vide Commentationes 41, 61, modo laudatas; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. 114,
p. 80 et 152. C. B.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc.}$$

summam esse $= \frac{\pi \pi}{12} - \frac{1}{2} (l2)^2$ denotante $l2$ logarithmum hyperbolicum qui est 0,693147180. Neque vero praeter hos casus ullus alius quo summam assignare liceat.

2. Methodus autem, qua hunc postremum casum sum ad extendi potest, ita ut inde plurimae insignes relationes inter series huius formae reperiri queant. Inuitur autem ista methodus

LEMMA

Si ponatur

$$p = \int \frac{\partial x}{x} l y \quad \text{et} \quad q = \int \frac{\partial y}{y} l x,$$

erit summa

$$p + q = l x \cdot l y + C,$$

siquidem constans ita definiatur, ut unico casui satisfaciat.

Hinc igitur sequentia problemata percurramus pro varia scilicet inter x et y .

PROBLEMA 1

Si fuerit $x + y = 1$, binas illas formulas

$$p = \int \frac{dx}{x} l y \quad \text{et} \quad q = \int \frac{dy}{y} l x$$

in series resolvere, ita ut hinc prodeat

$$p + q = l x \cdot l y + C.$$

1) Vide Commentationem 20, ibidem, imprimis p. 40. C. B.

3. Cum igitur sit $y = 1 - x$, erit

$$ly = -x - \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{3} \dots \text{etc.}$$

no

$$p = \int \frac{dx}{x} ly = -\frac{x}{1} - \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} \dots \text{etc.}$$

quo modo ob

$$x = 1 - y \text{ ob } lx = -y - \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \dots \text{etc.}$$

$$q = -\int \frac{dy}{y} lx = -\frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} \dots \text{etc.},$$

obrem harum duarum serierum summa erit $lx + ly = C$. Pro constante C attenda consideremus eam, quo $x = 0$ et $y = 1$ ideoque $lx + ly = 0$; tam C erit

$$p + q = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \dots \text{etc.} = -\frac{\pi\pi}{6},$$

solicetur $C = -\frac{\pi\pi}{6}$.

4. Quoties ergo fuerit $x + y = 1$, summa harum duarum serierum iunctim

$$\frac{x}{1} + \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \dots + \frac{y}{1} + \frac{yy}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + \dots \text{etc.}$$

$= \frac{\pi\pi}{6} - lx + ly$; hincque statim sequitur tertius casus supra memoratus. Cum enim $x = \frac{1}{2}$ erit quoque $y = \frac{1}{2}$ ideoque ambae hae series inter se les [ovadunt], unde sequitur fore

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \dots = \frac{\pi\pi}{12} \dots = \frac{1}{2} \left(l \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{\pi\pi}{12} = \frac{1}{2} (l2)^2.$$

$$A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.},$$

semper erit $A + B = \frac{\pi^2}{6} = la \cdot lb$. Hinc ergo, si alterius harum serierum aliunde esset cognita, etiam alterius summa innotesceret. Hocque est ipsum problema, quod iam olim tractavi.

PROBLEMA 2

Si fuerit $x - y = 1$, binas illas formulas

$$p = \int \frac{dx}{x} ly \quad \text{et} \quad q = \int \frac{dy}{y} lx$$

in series resolvere, ita ut hinc prodeat

$$p + q = lx \cdot ly + C.$$

SOLUTIO

5. Cum hic sit $y = x - 1$, erit

$$ly = l(x - 1) = lx + l\left(1 - \frac{1}{x}\right) = lx - \frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \text{etc.}$$

hincque

$$p = \int \frac{dx}{x} ly = \frac{1}{2}(lx)^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{16x^4} + \text{etc.}$$

Deinde ob $x = 1 + y$ erit

$$lx = \frac{y}{1} + \frac{yy}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{4} + \text{etc.}$$

ideoque

$$q = \int \frac{dy}{y} lx = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + \text{etc.}$$

est 0; tum igitur erit

$$p = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6} \quad \text{et} \quad q = 0,$$

definiantur constanta $C = \frac{\pi\pi}{6}$.

Hic igitur iterum duas habemus series, quarum coniunctim summam re valeamus:

$$\left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{16x^4} + \text{etc.} \\ &\frac{yy}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + \text{etc.} \end{aligned} \right\} = \frac{\pi\pi}{6} = \frac{1}{2}(tx)^2 + tx \cdot ty + \frac{\pi\pi}{6} + tx \cdot t\frac{y}{\sqrt{x}}.$$

Quodsi ergo habeantur hae duae series:

$$A = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \text{etc.}$$

$$B = \frac{b}{1} + \frac{b^2}{4} + \frac{b^3}{9} + \frac{b^4}{16} + \text{etc.},$$

sit $a = \frac{1}{x}$ et $b = y$, atque inter a et b haec datur relatio

$$ab + a = 1,$$

$$A + B = \frac{\pi\pi}{6} = ta + tb\sqrt{a}.$$

erimus casum, quo

$$b = a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ob } ab + a = 1 \right),$$

quocirca, existente $a = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$, huius seriei

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \text{etc.}$$

summa erit

$$\frac{\pi\pi}{12} = \frac{1}{2} la \cdot la \sqrt{a}.$$

8. Deinde etiam hic notatu dignus est casus, quo $b = -a$ atque hoc enim casu erit

$$\frac{\pi\pi}{6} = la \cdot lb \sqrt{a}.$$

At quia $b = -a$, erit

$$-aa + a = 1$$

hincque

$$a = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Iam cum sit

$$lb \sqrt{a} = \frac{1}{2} labb,$$

ob

$$bb = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

erit $abb = -1$, unde sequitur fore

$$\frac{\pi\pi}{6} = l \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot l \sqrt{-1},$$

id quod egregie convenit cum expressione cognita periphoriae logarithmos imaginarios.

9. Si poneremus hic $a = \frac{1}{2}$, foret $b = 1$ ideoque

$$B = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

prodiret tertius casus initio memoratus.

Uero faciamus hic $b = \frac{1}{2}$ eritque $a = \frac{2}{3}$ et

$$lba = \frac{1}{2} l bba = \frac{1}{2} l \frac{1}{6} = \frac{1}{2} l 6 \quad \text{et} \quad la = \frac{1}{2} l \frac{3}{2}.$$

habebimus

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.} \\ B = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \text{etc.} \end{array} \right\} \cdot \frac{\pi n}{6} = \frac{1}{2} l \frac{3}{2} \cdot l 6.$$

hinc ex problemate primo hanc aequationem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.} \\ \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.} \end{array} \right\} \cdot \frac{\pi n}{6} = l 3 \cdot l \frac{3}{2}$$

habebit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc.} \\ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \frac{1}{16 \cdot 3^4} + \text{etc.} \end{array} \right\} = l 3 \cdot l \frac{3}{2} = \frac{1}{2} l \frac{3}{2} \cdot l 6 = \frac{1}{2} \left(l \frac{3}{2} \right)^2.$$

habetur summa hanc aequationem notata dignam:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \text{etc.} = \frac{1}{2} \left(l \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.},$$

quo peripheriae π positus o calculo excessit. Verum eadem ratio
hæc modo facilius oritur.

10. Manente evolutione prioris partis p , altera

$$lx = l(1 + y) = ly + l(1 + \frac{1}{y})$$

hinc

$$lx = ly + \frac{1}{y} = \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} + \text{etc.}$$

erit

$$q = \int \frac{xy}{y} (lx) = \frac{1}{2} (ly)^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{4y^3} + \frac{1}{9y^5} + \text{etc.}$$

Nunc igitur erit

$$p + q = lx \cdot ly = C;$$

ubi constans C inde definiri potest, quod posito y

$$p = \frac{1}{2} (lx)^2 = \frac{xx}{12} = \frac{1}{2} (ly)^2 = \frac{xx}{12}$$

ob

$$q = \frac{1}{y} + \frac{1}{4y^3} + \frac{1}{9y^5} + \frac{1}{16y^7} + \text{etc.}$$

quibus valoribus substitutis pro hoc casu prodit p quoniam $C = 0$,

11. Verum haec constans etiam alio modo definitur vitæ gratia

$$X = \frac{1}{x} + \frac{1}{4xx} + \frac{1}{9xx^3} + \frac{1}{16xx^5} + \text{etc.}$$

et

$$Y = \frac{1}{y} + \frac{1}{4y^3} + \frac{1}{9y^5} + \frac{1}{16y^7} + \text{etc.}$$

ut habeamus

$$p = \frac{1}{2} (lx)^2 + X \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2} (ly)^2$$

hincque fiet

$$p + q = \frac{1}{2} (lx)^2 + \frac{1}{2} (ly)^2 + X = 0 = lx \cdot ly$$

deducimus

$$Y + X = \frac{1}{2} (lx)^2 + \frac{1}{2} (ly)^2 - lx \cdot ly = C = \frac{1}{2} \left(l \frac{x}{y} \right)^2 = C,$$

notandum est, esse $y = x = 1$, iam ad constantem C definiendam con-
tatur casus $x = \infty$, quo fit $X = 0$ et $Y = 0$, praeterea vero $l \frac{x}{y} = 0$,
et notatis erit $0 = C$ ideoque $C = 0$.

2. Hinc igitur nacti sumus duas series X et Y , quarum differentia per
logarithmos exprimitur, cum sit

$$Y - X = \frac{1}{2} \left(l \frac{x}{y} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(l^{y+1+1} \right)^2$$

$y = y + 1$. Ex hac forma sumto $y = 2$ statim fluit relatio ante inventa

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2} \left(l \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \frac{1}{16 \cdot 3^4} + \text{etc.}$$

autem modo nunc multo generalius habebimus

$$\frac{1}{1 \cdot y} + \frac{1}{4 \cdot y^2} + \frac{1}{9 \cdot y^3} + \frac{1}{16 \cdot y^4} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(l \frac{y+1}{y} \right)^2 + \frac{1}{1(y+1)} + \frac{1}{4(y+1)^2} + \frac{1}{9(y+1)^3} + \text{etc.},$$

pro y quicquid lubuerit accipere licet.

PROBLEMA 3

Si inter x et y haec detur relatio: $xy + x + y = c$, binas formulas

$$p = \int \frac{\partial x}{x} l y \quad \text{et} \quad q = \int \frac{\partial y}{y} l x$$

resolvere, ita ut hinc prodent

$$p + q = lx \cdot ly + C.$$

13. Hinc igitur primo erit

$$y = \frac{c-x}{1+x},$$

cuius logarithmus per duas series sequentes exprimitur:

$$ly = \begin{cases} lc - \frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{3c^3} - \frac{x^4}{4c^4} - \text{etc.} \\ -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \text{etc.} \end{cases}$$

unde fit

$$p = \int \frac{\partial x}{x} ly = \begin{cases} lc \cdot lx - \frac{x}{c} - \frac{x^2}{4c^2} - \frac{x^3}{9c^3} - \frac{x^4}{16c^4} - \text{etc.} \\ -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \text{etc.} \end{cases}$$

Simili modo, cum sit $x = \frac{c-y}{1+y}$, erit

$$q = \int \frac{\partial y}{y} lx = \begin{cases} lc \cdot ly - \frac{y}{c} - \frac{y^2}{4c^2} - \frac{y^3}{9c^3} - \frac{y^4}{16c^4} - \text{etc.} \\ -\frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} - \text{etc.} \end{cases}$$

Atque hinc erit $p + q = lx \cdot ly + C$.

14. Pro constante definienda consideremus casum, quo $p = lc \cdot lx$ et

$$q = \left. \begin{aligned} (lc)^2 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \text{etc.} \\ - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \frac{c^4}{16} - \text{etc.} \end{aligned} \right\}$$

sive

$$q = (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \frac{c^4}{16} - \text{etc.},$$

e aequatio nostra evadit

$$p + q = lc \cdot lx + (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \text{etc.} = lc \cdot lx + C,$$

ergo termini $lc \cdot lx$ se mutuo destruant, ita ut sit

$$C = (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \text{etc.}$$

15. Hic ergo quinque occurrunt series infinitae, quas sequenti modo invenimus:

$$\frac{c}{1} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{9} - \frac{c^4}{16} + \text{etc.} = O,$$

$$\frac{x}{c} + \frac{x^2}{4 \cdot c^2} + \frac{x^3}{9 \cdot c^3} + \frac{x^4}{16 \cdot c^4} + \text{etc.} = P,$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc.} = Q,$$

$$\frac{y}{c} + \frac{y^2}{4 \cdot c^2} + \frac{y^3}{9 \cdot c^3} + \frac{y^4}{16 \cdot c^4} + \text{etc.} = R,$$

$$\frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} + \text{etc.} = S;$$

bus litteris introductis nostra aequatio erit

$$lc \cdot lx - P - Q + lc \cdot ly - R - S = lx \cdot ly + (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} = O,$$

de sequitur fore

$$O - P - Q - R - S = lx \cdot ly + (lc)^2 - lc \cdot lx - lc \cdot ly - \frac{\pi\pi}{6},$$

ae expressio contrahitur in sequentem:

$$O - P - Q - R - S = l \frac{x}{c} \cdot l \frac{y}{c} - \frac{\pi\pi}{6}$$

mutatis signis

$$P + Q + R + S - O = \frac{\pi\pi}{6} - l \frac{x}{c} \cdot l \frac{y}{c}.$$

et

$$R + S = \frac{2y}{1} + \frac{2y^3}{9} + \frac{2y^5}{25} + \text{etc.},$$

tum vero

$$() = \frac{\pi\pi}{12},$$

sicque inter binas series satis simplicem relationem sumus ass

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{x}{1} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} + \frac{x^7}{49} + \text{etc.} \\ &+ \frac{y}{1} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{25} + \frac{y^7}{49} + \text{etc.} \end{aligned} \right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} \log x \cdot \log y,$$

ubi notandum est fore

$$xy + x + y = 1, \quad \text{hinc sive } y = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{sive } x = \frac{1-y}{1+y}$$

cuius aliquot exempla evolvisse iuvabit.

17. 1°. Si $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{3}$, unde sequitur aequatio

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{25 \cdot 2^5} + \frac{1}{49 \cdot 2^7} + \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \frac{1}{25 \cdot 3^5} + \frac{1}{49 \cdot 3^7} + \text{etc.} \end{aligned} \right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} \log 2$$

2°. Si $x = \frac{1}{4}$, erit $y = \frac{3}{5}$ ideoque

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{9 \cdot 4^3} + \frac{1}{25 \cdot 4^5} + \frac{1}{49 \cdot 4^7} + \text{etc.} \\ &+ \frac{3}{1 \cdot 5} + \frac{3^3}{9 \cdot 5^3} + \frac{3^5}{25 \cdot 5^5} + \frac{3^7}{49 \cdot 5^7} + \text{etc.} \end{aligned} \right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} \log 4.$$

7. Quin etiam datur casus, quo $x = y$, quod evenit ponendo

$$x = y = -1 + \sqrt{2} = a;$$

igitur fiet

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^6}{25} + \frac{a^7}{49} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{16} - \frac{1}{4}(la)^2.$$

8. In genere igitur etiam, quicquid fuerit c , operae pretium erit casum addere, quo fit $x = y$, quod evenit si')

$$x = y = -1 + \sqrt{1+c} = a;$$

igitur erit

$$P = R = \frac{a}{c} + \frac{a^2}{4 \cdot c^2} + \frac{a^3}{9 \cdot c^3} + \frac{a^4}{16 \cdot c^4} + \text{etc.},$$

$$Q = S = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^4}{16} + \text{etc.},$$

adducitur ista aequatio:

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{a^2}{4 \cdot c^2} + \frac{a^3}{9 \cdot c^3} + \frac{a^4}{16 \cdot c^4} + \text{etc.} \\ &- \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^4}{16} + \text{etc.} \end{aligned} \right\} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2} \left(l \frac{a}{c} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{1} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{9} - \text{etc.} \right).$$

Plurimas egregias relationes inter terminos huiusmodi series derivare licet, ergo evadunt rationales, quoties fuerit $1 + c$ quadratum.

9. Plures alias relationes inter binos numeros x et y evolvere liceret scilicet forma generali contentas:

$$xy \pm \alpha x \pm \beta y = \gamma,$$

autem posito $x = \beta t$ et $y = \alpha u$ in hanc simplicioremutatur:

$$tu \pm t \pm u = \frac{\gamma}{\alpha\beta},$$

Editio princeps: $x = y = -\frac{1 + \sqrt{1+c}}{2} = a.$ Correx. C. B.

THEOREMA I

20. Si habeantur hae duae series:

$$X = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \text{etc.}$$

et

$$Y = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + \text{etc.}$$

fuertque $x + y = 1$, tum semper erit

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} - lx \cdot ly,$$

cuius theorematis demonstratio in § 4 iam est tradita.

COROLLARIUM I

21. Hic ante omnia manifestum est summas harum non posse, simulac vel x vel y unitatem superaverit. casibus videtur in infinitum excescere; verum ea fit ad ob y negativum, logarithmus y imaginarius evadat.

COROLLARIUM II

22. Usus huius theorematis potissimum iis casibus parum ab unitate deficit ideoque prior series X parum altera Y eo magis converget. Veluti si fuerit $x = \frac{9}{10}$, er

$$X = \frac{9}{10} + \frac{9^2}{4 \cdot 10^2} + \frac{9^3}{9 \cdot 10^3} + \frac{9^4}{16 \cdot 10^4} + \text{etc.}$$

series vix convergens, cuius tamen summa per nostrum theorema facile proximo assignari poterit. Cum enim sit

$$Y = \frac{1}{10} + \frac{1}{4 \cdot 10^2} + \frac{1}{9 \cdot 10^3} + \frac{1}{16 \cdot 10^4} + \text{etc.},$$

quae series est maxime convergens, erit utique

$$X = \frac{\pi\pi}{6} - l10 \cdot l \frac{10}{9} - Y.$$

COROLLARIUM III

23. Ita in genere, si statuamus $x = \frac{m}{m+n}$ et $y = \frac{n}{m+n}$, erit

$$X = \frac{m}{1(m+n)} + \frac{m^2}{4(m+n)^2} + \frac{m^3}{9(m+n)^3} + \text{etc.}$$

et

$$Y = \frac{n}{1(m+n)} + \frac{n^2}{4(m+n)^2} + \frac{n^3}{9(m+n)^3} + \text{etc.};$$

tum igitur erit

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} - l \frac{m+n}{m} \cdot l \frac{m+n}{n}.$$

THEOREMA II

24. Si habeantur hae duae series:

$$X = \frac{1}{x} - \frac{1}{4xx} + \frac{1}{9x^3} - \frac{1}{16x^4} + \text{etc.},$$

$$Y = \frac{1}{y} + \frac{1}{4yy} + \frac{1}{9y^3} + \frac{1}{16y^4} + \text{etc.}$$

existente

$$y = x + 1,$$

cuius demonstratio colligitur ex § 12, dummodo litteræ mutantur.

COROLLARIUM I

25. Quia hic est $y = x + 1$, posterior series, Y , nō prior X . Quin etiam, si prior series, X , fuerit adeo diu quando x est fractio unitate minor, posterior nihilominus. Veluti si fuerit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{3}{2}$; ipsae vero series erunt

$$X = \frac{2}{1} - \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{9} - \frac{2^4}{16} + \frac{2^5}{25} -$$

et

$$Y = \frac{2}{3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \frac{2^4}{16 \cdot 3^4} + \text{etc.};$$

consequenter erit

$$X - Y = \frac{1}{2} (l3)^2.$$

Quia vero posterior series, Y , parum convergit, eam per hoc modo reducimus:

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6} - l3 \cdot l \frac{3}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 3}$$

hincque habebimus hanc summationem:

$$\frac{2}{1} - \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{9} - \frac{2^4}{16} + \text{etc.} = \frac{1}{2} (l3)^2 + \frac{\pi\pi}{6} - l3 \cdot l \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3} \right)$$

COROLLARIUM II

26. Sumamus nunc in genere $x = \frac{1}{n}$, ut sit series summa

$$X = \frac{n}{1} - \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{9} - \frac{n^4}{16} + \text{etc.},$$

vero ob $y = 1 + \frac{n}{n}$ altera series erit

$$Y = \frac{n}{n+1} + \frac{nn}{4(n+1)^2} + \frac{n^3}{9(n+1)^3} + \text{etc.}$$

que

$$X = \frac{1}{2}(l(n+1))^2 + Y.$$

vero per theorema I est

$$Y = \frac{\pi\pi}{6} - l(n+1) \cdot l \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{4(n+1)^2} - \frac{1}{9(n+1)^3} - \text{etc.},$$

valore substituto erit

$$\frac{1}{2}(l(n+1))^2 + \frac{\pi\pi}{6} - l(n+1) \cdot l \frac{n+1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{9(n+1)^3} + \text{etc.} \right),$$

expressio contrahitur in hanc:

$$\frac{n}{1} - \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{9} - \frac{n^4}{16} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2} l(n+1) \cdot l \frac{nn}{n+1} + \frac{\pi\pi}{6} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{9(n+1)^3} + \text{etc.} \right).$$

THEOREMA III

27. Si habeantur hae duae series:

$$X = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc.}$$

$$Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} - \frac{1}{16x^4} + \text{etc.},$$

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}(lx)^2.$$

loco x scribendo $\frac{1}{x}$ erit

$$Y = \int \frac{\partial x}{x} l(1+x)$$

sive

$$Y = - \int \frac{\partial x}{x} l(1+x) + \int \frac{\partial x}{x} lx$$

hincque addendo

$$X + Y = \int \frac{\partial x}{x} lx = \frac{1}{2} (lx)^2 + C,$$

ubi constans ex casu $x=1$ facillime definitur. Quia enim hoc
 X quam $Y = -\frac{\pi\pi}{12}$, erit constans $C = \frac{\pi\pi}{6}$ ideoque

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2} (lx)^2.$$

COROLLARIUM I

28. Quodsi ergo pro x numerus quantumvis magnus accipiamus
 theorematis summa seriei X , quae maxime est divergens, facillime
 cum reducatur ad seriem Y , quae eo magis est convergens, quae
 divergit.

COROLLARIUM II

29. Nunc vero ope theorematis secundi series

$$Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} - \text{etc.}$$

reducitur ad hanc formam:

$$Y = \frac{1}{2} \left(l \frac{x+1}{x} \right)^2 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{9(x+1)^3} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{2}\left(l^{\frac{x}{x+1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{1}{9}(x+1)^3 + \text{etc.}\right),$$

expressio cum superiori § 26 egregie convenit, quia est

$$\frac{1}{2}l(x+1) \cdot l^{\frac{xx}{x+1}} = \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{2}\left(l^{\frac{x}{x+1}}\right)^2,$$

evolventi facile patebit.

THEOREMA IV

30. Si habeantur hae series:

$$X = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} + \text{etc.} \quad \text{et} \quad Y = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{25} + \text{etc.}$$

ente

$$xy + x + y = 1$$

$$x = \frac{1-y}{1+y} \quad \text{vel} \quad y = \frac{1-x}{1+x},$$

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2}lx \cdot ly.$$

onstratio manifesta est ex § 16.

COROLLARIUM I

31. Hic iterum, ut supra, observandum est summas harum serierum fieri
 ginarias, simulac litterae x et y unitatem superaverint. At si fuerit $x < 1$,
 semper alia series eiusdem formae exhiberi potest, cuius summa ab illa
 eat. Ita si fuerit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{3}$. At si x prope ad unitatem ac-
 t, veluti $x = \frac{9}{10}$, altera series, Y , maxime converget.

binas huiusmodi series inter se comparare licet. Ad quod quens theorema speciale subiungamus, quod demum per l. bages sum adeptus, quod autem nunc satis commode ex pre-
rematibus deduci potest.

THEOREMA SPECIALE

33. Si habeantur hae series sibi affines:

$$A = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \frac{1}{25 \cdot 3^5} + \text{etc.}$$

et

$$B = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.},$$

tum erit

$$2A + B = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}(l3)^2.$$

DEMONSTRATIO

Cum ex theoremate primo, sumto $x = y = \frac{1}{2}$, sit

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2,$$

haec series sequenti modo resoluta repraesentari potest:

$$2\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{25 \cdot 2^5} + \text{etc.}\right) - 1\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} - \text{etc.}\right)$$

Nunc vero per theorema IV, sumto $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$, hab-
tionem:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{25 \cdot 2^5} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2}l2 \cdot l3 - \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{9 \cdot 3^3}$$

vero ex theoremate secundo, sumto $x = 2$ et $y = 3$, erit

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} - \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc.} = \frac{1}{2} \left(l \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.}$$

substituuntur iam hi valores loco illarum serierum, ac pro parte sinistra colligitur

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi\pi}{4} - l2 \cdot l3 - 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \frac{1}{25 \cdot 3^5} + \text{etc.} \right) \\ - \frac{1}{2} \left(l \frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.} \right) \end{aligned} \right\} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2} (l2)^2.$$

concludimus fore

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \frac{1}{25 \cdot 3^5} + \text{etc.} \right) \left\{ = \frac{\pi\pi}{6} - l2 \cdot l3 - \frac{1}{2} \left(l \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (l2)^2 \right. \\ & + 1 \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.} \right) \left. \right\} \\ & = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2} (l3)^2 \quad \left(\text{ob } \left(l \frac{3}{2} \right)^2 = (l3)^2 - 2l2 \cdot l3 + (l2)^2 \right). \end{aligned}$$

34. Quomocunque autem theoremata hic data inter se combinantur, alia relatio inter binas huiusmodi series elici potest, multo minus autem e eiusmodi series simplices eruere licet, quarum summa absolute exhiberi possunt, praeter casus iam indicatos, quos igitur hic coniunctim ob oculos ponamus.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6},$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2} (l2)^2,$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8}.$$

Practerea vero adiungi potest adhuc ista series:

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^7}{49} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{16} - \frac{1}{4}(la)$$

existente $a = \sqrt{2} - 1$.

Quamquam autem in hac serie valor ipsius a sit quaevis potestas seorsim evolvi debere videatur, tamen seriem recurrentem constituunt, in qua quilibet terminus definiri potest opo huius formulae:

$$a^{n+4} = 6a^{n+2} - a^n,$$

cuius veritas inde elucet, quod sit, per a^n dividendo, $a^4 = 6a^2 - 1$, unde $a = \sqrt{2} - 1$, erit $a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ et $a^4 = 17 - 12\sqrt{2}$, unde

OBSERVATIONES CIRCA FRACTIONES CONTINUAS IN HAC FORMA CONTENTAS¹⁾

$$S = \frac{n}{1 + \frac{n+1}{2 + \frac{n+2}{3 + \frac{n+3}{4 + \text{etc.}}}}}$$

Conventui exhibita die 18. Novembris 1779

Commentatio 742 indicis **ENESTROEMIANI**

Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétorsbourg 4 (1811), 1813, p. 52—74

1. Cum plures adhuc inventae sint methodi ad fractiones continuas determinandi earumque vicissim valores assignandi, nulla tamen earum ita comparata, cuius ope valores earum fractionum continuarum, quae in hac forma sunt contentae, investigari queant unico casu excepto, quo $n = 1$. Meum enim a me iam olim²⁾ istius formae

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \text{etc.}}}}}$$

1) Confer hac cum dissertatione Commentationes 71, 123, 522, 553, 593, 616, 745, 750 necnon *Introductionem in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. I cap. XVIII, *LEONHARDI EULERI Opera* vol. I⁴ p. 187 et 291; vol. II⁶ p. 314, 400 et 661; vol. II⁶ p. 34; vol. II⁶ p. 178 et p. 231 et p. 362. C. B.

2) Vide Commentationes supra laudatas 522, 553, 593 voluminis II⁶, imprimis p. 33 et 686. C. B.

adeo per numeros rationales exprimi queat: quamobrem super hoc argumento, quia istas summas inven. plurimum datur ad hanc doctrinam summi momenti uberius excolendo.

2. Quo indolem huius formae accuratius percrutari habebis, huiusmodi formulae sum complexus:

$$S = \frac{n}{1 + A},$$

$$A = \frac{n + 1}{2 + B},$$

$$B = \frac{n + 2}{3 + C},$$

$$C = \frac{n + 3}{4 + D},$$

etc.,

ex quibus vicissim sequentes derivantur:

$$A = \frac{n}{S} - 1,$$

$$B = \frac{n + 1}{A} - 2,$$

$$C = \frac{n + 2}{B} - 3,$$

$$D = \frac{n + 3}{C} - 4,$$

etc.

3. Hinc iam facile patet semper esse

$$S < \frac{n}{1}, \quad A < \frac{n + 1}{2}, \quad B < \frac{n + 2}{3}, \quad C < \frac{n + 3}{4}, \quad \text{etc.}$$

iam in prima formula loco A scribatur valor $\frac{n+1}{2}$, qui est valde
 , tum fractio $\frac{n}{1+\frac{n+1}{2}}$ erit nimis parva ideoque erit

$$S > \frac{n}{1 + \frac{n+1}{2}} \quad \text{sive erit} \quad S > \frac{2n}{n+3}.$$

nodo circa sequentes formulas ratiocinando fiet:

$$A > \frac{n+1}{2 + \frac{n+2}{3}} \quad \text{sive} \quad A > \frac{3(n+1)}{n+8},$$

$$B > \frac{n+2}{3 + \frac{n+3}{4}} \quad \text{sive} \quad B > \frac{4(n+2)}{n+15},$$

$$C > \frac{n+3}{4 + \frac{n+4}{5}} \quad \text{sive} \quad C > \frac{5(n+3)}{n+24},$$

$$D > \frac{n+4}{5 + \frac{n+5}{6}} \quad \text{sive} \quad D > \frac{6(n+4)}{n+35}$$

etc.

et autem has formulas conspectui clarius exponi.

Tabula I

$S = \frac{n}{1+A}$	$A = \frac{n}{S} - 1$
$A = \frac{n+1}{2+B}$	$B = \frac{n+1}{A} - 2$
$B = \frac{n+2}{3+C}$	$C = \frac{n+2}{B} - 3$
$C = \frac{n+3}{4+D}$	$D = \frac{n+3}{C} - 4$
$D = \frac{n+4}{5+E}$	$E = \frac{n+4}{D} - 5$
$E = \frac{n+5}{6+F}$	$F = \frac{n+5}{E} - 6$
$F = \frac{n+6}{7+G}$	$G = \frac{n+6}{F} - 7$

Tabula II

$S < \frac{n}{1}$	$S > \frac{2n}{n+3}$
$A < \frac{n+1}{2}$	$A > \frac{3(n+1)}{n+8}$
$B < \frac{n+2}{3}$	$B > \frac{4(n+2)}{n+15}$
$C < \frac{n+3}{4}$	$C > \frac{5(n+3)}{n+24}$
$D < \frac{n+4}{5}$	$D > \frac{6(n+4)}{n+35}$
$E < \frac{n+5}{6}$	$E > \frac{7(n+5)}{n+48}$
$F < \frac{n+6}{7}$	$F > \frac{8(n+6)}{n+63}$

que eorum aliquis extra limites in secunda tabula assignatos cadat, erit signum valorem assumtum esse falsum ideoque vel nimis magnus nimis parvum; hocque modo plures pro S valores fingendo continuè ad verum valorem accedere licebit. His igitur observationibus et quosdam casus simpliciores evolvendos.

EVOLUTIO CASUS, QUO $n = 2$ IDEOQUE

$$S = \frac{2}{1 + \frac{3}{2 + \frac{4}{3 + \frac{5}{4 + \frac{6}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

5. Pro hoc igitur casu limites erunt

$$S < \frac{2}{1} \quad \text{et} \quad S > \frac{4}{5},$$

$$A < \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad A > \frac{9}{10},$$

$$B < \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad B > \frac{16}{17},$$

$$C < \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad C > \frac{25}{26},$$

$$D < \frac{6}{5} \quad \text{et} \quad D > \frac{36}{37}$$

etc.

Sumamus igitur $S = 1$ atque, si inde sequentium litterarum valores accedant, reperiemus

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 1 \text{ etc.},$$

qui valores cum omnino infra assignatos limites cadant, id certum est valorem assumptum $S = 1$ veritati esse consentaneum, quod quidem a ipsa forma perspicere licuisset.

EVOLUTIO CASUS, QUO $n = 3$ EST

$$S = \frac{3}{1}, \quad \frac{4}{1+1}, \quad \frac{5}{2+1}, \quad \frac{6}{3+1}, \quad \frac{6}{4+1}, \quad \frac{7}{5+1} \text{ etc.}$$

6. Hoc ergo casu limites nostri erunt

$$S = \frac{3}{1}, \quad S \geq 1,$$

$$A = \frac{2}{1}, \quad A \leq \frac{12}{11},$$

$$B = \frac{5}{3}, \quad B \leq \frac{20}{18},$$

$$C = \frac{6}{4}, \quad C \leq \frac{30}{27},$$

$$D = \frac{7}{6}, \quad D \leq \frac{42}{38}$$

etc.

Hinc iam statim patet non esse $S = 2$; foret enim $A = \frac{1}{2}$, quod ex-
Sumto $S = \frac{3}{2}$ fit $A = 1$, qui valor etiam extra limites cadit. Sumatur
 $S = \frac{4}{3}$ et prodibit $A = \frac{6}{4}$, qui valor iam intra limites cadit; hinc et
 $B = \frac{6}{5}$, $C = \frac{7}{6}$, $D = \frac{8}{7}$, $E = \frac{9}{8}$, $F = \frac{10}{9}$ etc., qui valores cum omni-
bus limitibus praescriptis cadunt, hoc certum est signum huius fractionis co-
propositio verum valorem esse $S = \frac{4}{3}$.

7. Commode hic usu venit, ut omnes valores litterarum S , A ,
 B etc. manifesto ordine se insequantur, scilicet $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}$ etc., et

diit progressio arithmetica, cuius differentiae primae sunt constan-
 cludero licet etiam pro reliquis casibus eiusmodi valores pro
 A, B, C, D etc. prodire debere, qui differentiis continuo sumendis
 differentias evanescentes perducant. Hoc observato relinquamus ip-
 valorem indefinitum indeque computemus valores sequentium litterarum

$$A = \frac{3-S}{S}, \quad B = \frac{6S-6}{3-S}, \quad C = \frac{33-23S}{6S-6}, \quad D = \frac{128S-168}{33-23S}$$

Iam termini harum fractionum, scilicet denominatores, in hac se-
 diuntur:

$$1, \quad S, \quad 3-S, \quad 6S-6, \quad 33-23S, \quad 128S-168 \quad \text{etc.}$$

Hinc erunt

$$\text{Differentiae primae} \quad S-1, \quad 3-2S, \quad 7S-9, \quad 39-29S, \quad 151S$$

$$\text{Differentiae secundae} \quad 4-3S, \quad 9S-12, \quad 48-36S, \quad 180S$$

$$\text{Differentiae tertiae} \quad 12S-16, \quad 60-45S, \quad 216S$$

Hic statim patet differentias primas non evanescere, quia ex iis nihi-
 prodirent diversi valores pro S sequentes $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{7}, \frac{39}{29}$ etc. At ver-
 rentiae secundae nihilo aequantur, omnes praebent $S = \frac{4}{3}$, quem e-
 lorem differentiae tertiae et sequentes nihilo aequatae produciunt, s-
 esse possumus revera fore $S = \frac{4}{3}$.

EVOLUTIO CASUS, QUO $n = 4$ ET

$$S = \frac{4}{1 + \frac{6}{2 + \frac{6}{3 + \frac{7}{4 + \text{etc.}}}}}$$

8. Hic statim adhibeamus methodum modo ante expositam et
 indefinito S colligimus valores litterarum A, B, C, D etc., qui or-
 untur

$$A = \frac{4}{8} S^2, \quad B = \frac{7S}{4} - \frac{8}{S}, \quad C = \frac{18}{7S} - \frac{27S}{8}, \quad D = \frac{157S}{48} - \frac{248}{27S},$$

$$E = \frac{1624}{157S} - \frac{1001S}{248} \quad \text{etc.}$$

hunc termini harum formularum in seriem disponantur et continuo dillicapiantur, ut sequitur:

$$\begin{array}{l} \text{I. } S, \quad 4 \quad S, \quad 7S \quad 8, \quad 48 \quad 27S, \quad 157S \quad 248 \\ \text{D. I. } S = 1, \quad 4 \quad 2S, \quad 8S \quad 12, \quad 56 \quad 31S, \quad 184S \quad 296 \\ \text{D. II.} \quad \quad \quad 5 \quad 3S, \quad 10S \quad 16, \quad 68 \quad 42S, \quad 218S \quad 352 \\ \text{D. III.} \quad \quad \quad \quad 13S \quad 21, \quad 81 \quad 52S, \quad 260S \quad 420 \\ \text{D. IV.} \quad \quad \quad \quad \quad \quad 105 \quad 65S, \quad 312S \quad 504 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{etc.} \end{array}$$

Hic statim perspicuum est neque differentias primas neque secundas satisfacere, quin ex iis nihilo aequalis diversi valores pro S essent prout vero differentiae tertiae omnes dant $S = \frac{21}{13}$, qui ergo pro vero valuationis continuus propositae est habendus.

9. Quo autem de hoc certiores reddamur, exploremus istum valor per methodum primo indicatam ex eoque computemus sequentes valores secundae columnae primae tabulae sumendo $n = 4$, ut sequitur:

$$A = \frac{31}{21}, \quad B = \frac{43}{31}, \quad C = \frac{57}{43}, \quad D = \frac{73}{57}, \quad E = \frac{91}{73} \quad \text{etc.,}$$

qui valores omnes intra limites in tabula secunda datos cadere deprehendunt. Praeterea vero egregium ordinem progressionis inter se servant, cum termini crescant secundum differentias 8, 10, 12, 14, 16 etc., quae binario continuo crescant; cum contra quilibet alii valores pro S assumpti valores absurdos deducerent, qui mox extra limites praescriptos extravagarent.

$$S = \frac{6}{1 + \frac{6}{2 + \frac{7}{3 + \frac{8}{4 + \text{etc.}}}}}$$

10. Applicemus hic etiam methodum ante usitatam, et habebimus sequentes valores:

$$A = \frac{5-S}{S}, \quad B = \frac{8S-10}{5-S}, \quad C = \frac{65-31S}{8S-10}, \quad D = \frac{188S-340}{65-31S},$$

$$E = \frac{2285-1219S}{188S-340} \quad \text{etc.}$$

Iam termini harum fractionum in seriem disponantur et diffiniantur hoc modo:

	1,	S,	5 — S,	8S — 10,	65 — 31S,	188S — 340,	
D. I.	S — 1,	5 — 2S,	9S — 15,	75 — 39S,	219S — 405,		
D. II.		6 — 3S,	11S — 20,	90 — 48S,	258S — 480,		
D. III.			14S — 26,	110 — 59S,	306S — 570,		
D. IV.				136 — 73S,	365S — 680,		
					etc.		

11. Hinc differentiae tertiae nondum negotium conficiuntur diversi valores pro S; at ex differentiis quartis omnium valorum $S = \frac{136}{73}$, qui ergo est verus valor fractionis continuandae primam methodum explorare velimus, egregie cum limbo convenireprehendetur. Casus autem iam evoluti in ordinem

$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$
$S = 1$		$S = \frac{4}{3}$		$S = \frac{21}{13}$		$S = \frac{136}{73}$

METHODUS SECUNDA

SUMMAS HARUM SERIERUM CONTINUARUM INVESTIGANDI

13. Quoniam vidimus valores litterarum S, A, B, C, D etc. semper secum certam quandam legem uniformem progredi, cum litterae A, B, C, D etc. exprimunt similium fractionum continuarum vel uno vel duobus vel s etc. membris truncatarum¹, cum sit

$$\begin{array}{lll} A = \frac{n+1}{n+2} & B = \frac{n+2}{3+\frac{n+3}{1+\frac{n+4}{5+\text{etc}}}} & C = \frac{n+3}{1+\frac{n+4}{5+\frac{n+5}{6+\text{etc}}}} \quad \text{etc.}, \\ \frac{n+1}{2+\frac{n+2}{3+\frac{n+3}{4+\text{etc}}}} \end{array}$$

non est dubium, quin etiam nostra formula proposita retro continuata eam legem uniformem sit secutura. Sin autem nostra formula uno gradu continuetur, prodibit $\frac{n+1}{n+2}$, quam vocemus α , ita ut sit

$$\alpha = \frac{n+1}{n+2}.$$

Si duobus gradibus retro continuemus, erit

$$\frac{n+3}{1+\alpha} = \beta.$$

Simili modo ultra retrogrediamur, nanciscuntur has formulas:

$$\frac{n+5}{2+\beta} = \gamma, \quad \frac{n+4}{3+\gamma} = \delta, \quad \frac{n+5}{4+\delta} = \epsilon, \quad \frac{n+6}{5+\epsilon} = \zeta \quad \text{etc.}$$

¹ Editio princeps: *truncatas*. C. B.

similem legem uniformitatis continuam deprehendi debere. Retro igitur formulae continuentur, donec perveniatur ad numeratorem $= 0$, habebitur talis forma:

$$0 = -\lambda + \frac{1}{-\lambda + 1 + \frac{2}{-\lambda + 2 + \frac{3}{-\lambda + 3 + \text{etc.}}}}$$

quae autem expressio, etiamsi numerator est $= 0$, ideo non ipsa evanescit censenda, quia evenire potest, ut etiam denominator evanescat hoc revera usu venit in nostris formis, quas sumus perscrutaturi; igitur erit

$$0 = -\lambda + \frac{1}{-\lambda + 1 + \frac{2}{-\lambda + 2 + \frac{3}{-\lambda + 3 + \text{etc.}}}}$$

quae ergo fractio continua si continuetur usque ad ipsam formam positam S , inde elici poterit valor ipsius S , id quod pro singulis ostendemus.

14. Sit igitur $n = 2$, et forma fractionis continuae retro continuatur

$$-1 + \frac{1}{0 - S},$$

quae ergo nihilo aequata dabit $S = 1$, ut ante invenimus. Pro casu orietur haec aequatio:

$$0 = -2 + \frac{1}{-1 + \frac{2}{0 + S}}$$

unde fit

$$2 = \frac{1}{-1 + \frac{2}{S}}$$

ideoque $S = \frac{4}{3}$, ut ante. Pro casu $n = 4$ habebimus

$$0 = -3 + \frac{1}{-2 + \frac{2}{-1 + \frac{3}{0 + S}}}$$

unde fit $S = \frac{21}{13}$. Hic autem calculus expeditius instituetur, si litteras introductis α , β , γ utamur; tum enim erit $0 = -3 + \gamma$. Erat autem

$$\alpha = \frac{3}{S}, \quad \beta = -1 + \frac{2}{\alpha}, \quad \gamma = -\frac{1}{-2 + \beta}.$$

Hic ergo erit

$$\gamma = 3 \quad \text{ideoque} \quad 3 = -\frac{1}{-2 + \beta},$$

unde fit

$$\beta = \frac{7}{3} = -\frac{2}{-1 + \alpha}$$

hincque colligitur

$$\alpha = \frac{13}{7} = \frac{3}{S},$$

sicque tandem erit $S = \frac{21}{13}$. Hoc ergo artificio etiam in sequentibus

15. Quo has operationes pro maioribus numeris n sublevemus, multis pro litteris α , β , γ , δ etc. ante assumtis derivemus reciprocas, quaelibet littera per praecedentem definiatur, quas utrasque formulas sequenti tabella exhibeamus:

$$\begin{array}{lcl}
 \beta = \frac{n-2}{-1+\alpha} & | & \alpha = 1 + \frac{n-2}{\beta} \\
 \gamma = \frac{n-3}{-2+\beta} & | & \beta = 2 + \frac{n-3}{\gamma} \\
 \delta = \frac{n-4}{-3+\gamma} & | & \gamma = 3 + \frac{n-4}{\delta} \\
 \varepsilon = \frac{n-5}{-4+\delta} & | & \delta = 4 + \frac{n-5}{\varepsilon} \\
 \zeta = \frac{n-6}{-5+\varepsilon} & | & \varepsilon = 5 + \frac{n-6}{\zeta} \\
 & | & \zeta = 6 + \frac{n-7}{\eta}
 \end{array}$$

16. iam beneficio huius tabulae facile erit omnes casus
 Ac primo quidem sumto $n=1$, quo casu fit

$$S = \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \text{etc.}}}}$$

videtur fieri $S=0$, cum tamen supra innuimus esse $S = \frac{1}{e-1}$.
 notetur istam conclusionem non valere, si etiam fuerit $\alpha=0$,
 $S = 0 + \frac{0}{0}$. Nihil vero repugnat, quominus sit $\frac{0}{0} = \frac{1}{e-1}$, quod
 hoc casu locum habet.

Progrediamur ergo ad reliquos casus; ac sumto $n=2$, ubi

$$S = \frac{2}{1 + \frac{3}{2 + \text{etc.}}}$$

quia hic β non est $=0$, manifesto erit $\alpha=1$ hincque $S = \frac{1}{e-1}$,
 invenimus.

Sit iam $n = 3$ ideoque

$$S = \frac{3}{1 + \frac{4}{2 + \frac{5}{3 + \text{etc.}}}}$$

erit $\beta = 2$, quia non est $\gamma = 0$; hinc ergo regrediendo erit

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad S = \frac{4}{3}.$$

Sumto porro $n = 4$, quo casu erit

$$S = \frac{4}{1 + \frac{5}{2 + \frac{6}{3 + \text{etc.}}}}$$

erit $\gamma = 3$, unde oriuntur sequentes valores:

$$\beta = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3},$$

$$\alpha = 1 + \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{13}{7},$$

et

$$S = \frac{21}{13}.$$

Sit $n = 5$, quo casu fit

$$S = \frac{5}{1 + \frac{6}{2 + \frac{7}{3 + \frac{8}{4 + \text{etc.}}}}}$$

tum erit $\delta = 4$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\gamma = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4},$$

$$\beta = 2 + \frac{2 \cdot 4}{13} = \frac{34}{13},$$

$$\alpha = 1 + \frac{3 \cdot 13}{34} = \frac{73}{34}$$

et

$$S = 0 + \frac{4 \cdot 34}{73} = \frac{136}{73}.$$

17. Nunc ulterius progrediamur ac ponamus $n = 6$, q

$$S = \frac{6}{1 + \frac{7}{2 + \frac{8}{3 + \text{etc.}}}}$$

critque $\varepsilon = 5$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\delta = 4 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5},$$

$$\gamma = 3 + \frac{2 \cdot 5}{21} = \frac{73}{21},$$

$$\beta = 2 + \frac{3 \cdot 21}{73} = \frac{209}{73},$$

$$\alpha = 1 + \frac{4 \cdot 73}{209} = \frac{501}{209},$$

$$S = 0 + \frac{5 \cdot 209}{501} = \frac{1045}{501}.$$

18. Sit nunc $n = 7$ et

$$S = \frac{7}{1 + \frac{8}{2 + \frac{9}{3 + \frac{10}{4 + \text{etc.}}}}}$$

erit $\zeta = 6$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\varepsilon = 5 + \frac{1}{6} = \frac{31}{6},$$

$$\delta = 4 + \frac{2 \cdot 6}{31} = \frac{136}{31},$$

$$\gamma = 3 + \frac{3 \cdot 31}{136} = \frac{501}{136},$$

$$\beta = 2 + \frac{4 \cdot 136}{501} = \frac{1546}{501},$$

$$\alpha = 1 + \frac{5 \cdot 501}{1546} = \frac{4051}{1546},$$

$$S = 0 + \frac{6 \cdot 1546}{4051} = \frac{9276}{4051}.$$

$$S = \frac{8}{1 + \frac{9}{2 + \frac{10}{3 + \text{etc.}}}}$$

tum erit $\eta = 7$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\zeta = 6 + \frac{1}{7} = \frac{43}{7},$$

$$\epsilon = 5 + \frac{2 \cdot 7}{43} = \frac{229}{43},$$

$$\delta = 4 + \frac{3 \cdot 43}{229} = \frac{1045}{229},$$

$$\gamma = 3 + \frac{4 \cdot 229}{1045} = \frac{4051}{1045},$$

$$\beta = 2 + \frac{5 \cdot 1045}{4051} = \frac{13327}{4051},$$

$$\alpha = 1 + \frac{6 \cdot 4051}{13327} = \frac{37633}{13327},$$

$$S = 0 + \frac{7 \cdot 13327}{37633} = \frac{93289}{37633}.$$

20. Illos iam valores pro littera S inventos in ordinem disponamus eorum progressio facilius considerari possit, quos ergo sequenti modo representemus:

n	2	3	4	5	6	7	8	etc.
S	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{136}{73}$	$\frac{1045}{501}$	$\frac{9276}{4051}$	$\frac{93289}{37633}$	etc.

Inter has autem fractiones primo intuitu nulla certa lex regnare videtur, verum re attentius perpensa haud difficulter quandam progressionis observare licet. Si enim quemlibet numeratorem cum summa numerato-

$$\begin{aligned}
21 &= 3 \quad (4 + 3) = 3 \cdot 7 \\
136 &= 4 \quad (21 + 13) = 4 \cdot 34 \\
1045 &= 5 \quad (136 + 73) = 5 \cdot 209 \\
9276 &= 6 (1045 + 501) = 6 \cdot 1546 \\
93289 &= 7 (9276 + 4051) = 7 \cdot 13327 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Pro denominatoribus autem hand absimilis relatione libet sit summa praecedentis numeratoris certo multiplo qui ordo sequenti modo in oculos incurret:

$$\begin{aligned}
3 &= 1 + 2, \quad 4 = 1 + 3 \\
13 &= 4 + 3, \quad 3 = 4 + 5 \\
73 &= 21 + 4, \quad 13 = 21 + 5 \\
501 &= 136 + 5, \quad 73 = 136 + 6 \\
4051 &= 1045 + 6, \quad 501 = 1045 + 7 \\
37633 &= 9276 + 7 \cdot 4051 = 9276 + 28357 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

21. Hinc ergo, si pro quolibet numero n inventa

$$S = \frac{p}{q},$$

pro sequente numero, $n + 1$, fiet

$$S = \frac{n(p+q)}{p+nq},$$

cuius formulae opo ex quolibet casu sequens multo expeditior quam per praecedentem methodum. Ita cum pro casu valor

$$S = \frac{93289}{37633},$$

sequente casu $n = 9$ erit

$$S = \frac{8(93289 + 37633)}{93289 + 8 \cdot 37633} = \frac{1047376}{394353}.$$

quia haec eximia regula hactenus sola inductione inimitur, eius demonstrationem in sequente articulo dabimus. Ante autem quam hoc argumentum amamus, observasse iuvabit posteriorem columnam tabulae (§ 15) datae insignem novam proprietatem suppeditare. Si enim loco litterarum γ etc. eorum valores successive substituamus, pro S novam fractionem novam nanciscemur, quae ita se habet:

$$S = \frac{n-1}{1 + \frac{n-2}{2 + \frac{n-3}{3 + \frac{n-4}{4 + \frac{n-5}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

forma semper abruptitur, unde operae pretium erit hanc transformationem in sequenti theoremate ante oculos posuisse.

THEOREMA

22. Si fuerit

$$S = \frac{n}{1 + \frac{n+1}{2 + \frac{n+2}{3 + \frac{n+3}{4 + \text{etc.}}}}}}$$

tunc semper

$$S = \frac{n-1}{1 + \frac{n-2}{2 + \frac{n-3}{3 + \frac{n-4}{4 + \frac{n-5}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

idem n fuerit numerus integer positivus, excepta unitate ob rationem supra datam.

23. Si evolutiones casuum ante tractatorum contemplan-
mus in fractionibus pro litteris α, β, γ etc. datis inverso
numeratorem dare denominatorem sequentis; quamobrem omnes
disponamus ac differentias tam primas quam secundas et se-
quamus. Ita pro casu $n = 3$ termini harum fractionum ab u-
erunt sequentes:

1, 2, 3, 4,

D. I. 1, 1, 1.

Simili modo pro $n = 4$ habebimus hos terminos:

1, 3, 7, 13, 21,

D. I. 2, 4, 6, 8,

D. II. 2, 2, 2.

Casus vero $n = 5$ praebet sequens schema:

1, 4, 13, 34, 73, 136,

D. I. 3, 9, 21, 39, 63,

D. II. 6, 12, 18, 24,

D. III. 6, 6, 6.

Casus porro $n = 6$ dat sequens schema:

1, 5, 21, 73, 209, 501, 1045,

D. I. 4, 16, 52, 136, 292, 544,

D. II. 12, 36, 84, 156, 252,

D. III. 24, 48, 72, 96,

D. IV. 24, 24, 24.

casu $n = 7$ habebimus

	1,	6,	31,	136,	501,	1546,	4051,	9276,
D. I.	5,	25,	105,	365,	1045,	2505,	5225,	
D. II.	20,	80,	260,	680,	1460,	2720,		
D. III.	60,	180,	420,	780,	1260,			
D. IV.	120,	240,	360,	480,				
D. V.	120,	120,	120,					

s denique $n = 8$ dat sequens schema:

	1,	7,	43,	229,	1045,	4051,	13327,	37633,	93289,
D. I.	6,	36,	186,	816,	3006,	9276,	24306,	55656,	
D. II.	30,	150,	630,	2190,	6270,	15030,	31350,		
D. III.	120,	480,	1560,	4080,	8760,	16320,			
D. IV.	360,	1080,	2520,	4680,	7560,				
D. V.	720,	1440,	2160,	2880,					
D. VI.	720,	720,	720,						

24. Consideratio horum casuum nobis sequentes conclusiones suppeditat:

1°. Quia omnes hi casus tandem ad differentias constantes perducunt, discimus omnes istas series esse algebraicas, quarum scilicet terminus ralis algebraico exhiberi queat.

2°. Porro etiam videmus differentias constantes constituere progressionem geometricam, scilicet

1, 2, 6, 24, 120, 720 etc.

3°. Constat autem terminos generales cuiusque progressionis ex terminis is singularum differentiarum formari, qui ergo termini primi se habent sequens tabella indicat:

$n = 5$:	1,	3,	6,	6,	
$n = 6$:	1,	4,	12,	24,	24,
$n = 7$:	1,	5,	20,	60,	120,
$n = 8$:	1,	6,	30,	120,	360,
					720,	720,
						etc.

Evidens autem est hanc postremam seriem hoc modo repræ-

$$1, \quad 6, \quad 6 \cdot 5, \quad 6 \cdot 5 \cdot 4, \quad 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3, \quad 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2,$$

4^a. Cum ista progressio referatur ad casum $n = 8$, hinc licet in genere terminos primos tam ipsius seriei quam ipsa hanc constituturos esse progressionem:

$$1, \quad n - 2, \quad (n - 2)(n - 3), \quad (n - 2)(n - 3)(n - 4),$$

5^a. Deinde vero ex doctrina progressionum constat terminum cuiusque seriei reperiri, si, manente termino ipsius seriei differentiarum terminus primus multiplicetur per x , secundarum per $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}$, tertiarum per $\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ et ita porro generalis pro nostro casu hoc modo exprimetur:

$$1 + (n-2)x + (n-2)(n-3)\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + (n-2)(n-3)(n-4)\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

unde sumto $x = 1$ oritur terminus secundus $n - 1$; at si numeri 2, 3, 4 etc., orientur termini tertius, quartus, quintus etc. autem hæc pro singulis casibus evolvere.

25. Hinc ergo si fuerit $n = 2$, terminus generalis erit terminus generalis erit $1 + x$. Hoc autem casu ipsa seriei ubi patet sumto $x = 3$ prodire terminum ultimum 4, qui

divisus dat valorem ipsius $S = \frac{4}{3}$. Sumatur nunc $n = 4$; et seriei 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 erit terminus generalis

$$= 1 + 2x + x(x-1) = 1 + x + xx,$$

unde sumto $x = 4$ prodit terminus ultimus = 21, qui per praecedentem divisus dat $S = \frac{21}{13}$. Sit nunc $n = 5$; et progressionis 1, 4, 13, 34, 79, 169, 361, 781, 1681, 3713, 8128, 17713, 38809, 84844, 185191, 404756, 881776, 1912435, 4181394, 9114189, 19709116, 43046721, 93196064, 202702549, 441191904, 961488649, 2100961936, 4552479904, 9914419841, 21619999361, 47449999361, 1045 terminus generalis erit

$$1 + 3x + 3 \cdot 2 \cdot \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

unde sumto $x = 5$ oritur ultimus terminus 136, qui per penultimum dat valorem ipsius S . Simili modo sumto $n = 6$, seriei 1, 5, 21, 73, 253, 845, 2835, 9781, 34397, 124739, 453205, 1679605, 6209026, 23008353, 86013979, 320343681, 1200483841, 4601397889, 17504838401, 67013978881, 255048384001, 980139788801, 3750483840001, 14801397888001, 58013978880001, 22504838400001, 890139788800001, 3501397888000001, 13801397888000001, 55013978880000001, 218013978880000001, 870139788800000001, 3401397888000000001, 1365 terminus generalis erit

$$1 + 4x + 4 \cdot 3 \cdot \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

qui posito $x = 6$ praebet terminum ultimum at posito $x = 5$ penultimum quorum ille per hunc divisus praebet valorem ipsius S .

26. Quoniam autem hic tantum agitur de termino ultimo et per horum terminorum formam pro casu $n = 6$ accuratius perpendamus. igitur $x = 5$ erit terminus penultimus

$$1 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

at sumto $x = 6$ habebitur terminus ultimus

$$1 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

unde, si pro hoc casu ponatur $S = \frac{p}{q}$ et denominatores ad priores referantur, erit

$$p = 1 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3.$$

ubi evidens est coefficientes priores ex potestate quarta binom

27. In omnibus igitur casibus optimo successu coefficientibus uti poterimus et, quoniam pro valore generali n coefficientibus $n - 2$ sunt desumendi, meminisse iuvabit me olim¹⁾ hoc coefficienti modo expressisse:

$$\left[\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} n-2 \\ 3 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} n-2 \\ 4 \end{matrix} \right] \text{ etc.}$$

Si ponamus, ut hactenus, $S = \frac{p}{q}$, erit

$$p = 1 + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix} \right] n + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix} \right] n(n-1) + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 3 \end{matrix} \right] n(n-1) \\ + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 4 \end{matrix} \right] n(n-1)(n-2)(n-3) + \text{etc.}$$

et

$$q = 1 + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix} \right] (n-1) + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix} \right] (n-1)(n-2) \\ + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 3 \end{matrix} \right] (n-1)(n-2)(n-3) + \text{etc.}$$

Ita si fuerit $n = 7$, erit hinc

$$p = 1 + 5 \cdot 7 + 10 \cdot 7 \cdot 6 + 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 7 \cdot$$

et

$$q = 1 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot 5 + 10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \cdot$$

Tales igitur expressiones ad quosvis casus facile applicantur.

1) Confer Commentationem 575; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. 12. Notandum est singulas Commentationes in designandi modo inter se differre. V. p. 3 voluminis Ito adiectam. C. D.

28. Quodsi iam istae formulae pro p et q inventae accuratius perpendantur et cum sequente casu $n + 1$, pro quo sit $S = \frac{p'}{q'}$ ideoque

$$= 1 + \left[\frac{n-1}{1} \right] (n+1) + \left[\frac{n-1}{2} \right] (n+1)n + \left[\frac{n-1}{3} \right] (n+1)n(n-1) + \text{etc.}$$

$$q' = 1 + \left[\frac{n-1}{1} \right] n + \left[\frac{n-1}{2} \right] n(n-1) + \left[\frac{n-1}{3} \right] n(n-1)(n-2) + \text{etc.}$$

parentur, haud difficulter inde deduci poterit insignis illa relatio, quam ante [§ 21] in medium attulimus, scilicet semper esse

$$p' = np + nq$$

$$q' = p + nq,$$

ae proprietates eo magis est notatu digna, quod eius ope ex quolibet casu ens facillime derivari potest, quemadmodum iam in praecedente articulo ostensum.

DE SERIE MAXIME MEMORABILI Q BINOMIALIS QUaecunQUE EXPR

Conventui exhibita die 20. Decembris 177

Commentatio 743 indicis ENESTROMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 4 (18

1. Memini me olim vidisse seriem prorsus sim
binomiali $(1+x)^n$, quae abrumpebatur pro casibus, c
tam numerus integer positivus quam negativus. Quia
amplius recordabar, eam sequenti modo sum perseru
abrumpi debet, sive n fuerit numerus integer positiv
sub hac forma repraesento:

$$(1+x)^n = A + nB + n(n-1)C + (n+1) \\ + (n+1)n(n-1)(n-2)E + (n+2) \cdots (n-2)F + (n$$

2. Hac forma generali constituta litteras A, B
minemus, ut casibus, quibus pro n numerus integer si
tivus assumitur, satisfiat; unde casus simpliciores sequen

$$\text{Si } n = 0, \text{ erit } 1 = A,$$

$$\text{Si } n = 1, \text{ erit } 1+x = A + B,$$

$$\text{Si } n = -1, \text{ erit } \frac{1}{1+x} = A - B + 2C,$$

$$\text{Si } n = 2, \text{ erit } (1+x)^2 = A + 2B + 2C + 6D,$$

$$\text{Si } n = -2, \text{ erit } \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = A - 2B + 6C - 6D +$$

Si $n = 3$, erit $(1+x)^3 = A + 3B + 6C + 24D + 24E + 120F$,

Si $n = -3$, erit $\frac{1}{(1+x)^3} = A - 3B + 12C - 24D + 120E - 120F + 720G$,

Si $n = 4$, erit $(1+x)^4 = A + 4B + 12C + 60D + 120E + 720F + 720G$
 $+ 5040H$,

Si $n = -4$, erit $\frac{1}{(1+x)^4} = A - 4B + 20C - 60D + 360E - 720F + 5040G$
 $- 5040H + 40320I$

etc.

3. Iam resolutio harum aequationum pro litteris A, B, C, D etc. quentes nobis praebet valores:

$$1. \quad A = 1,$$

$$2. \quad B = x,$$

$$3. \quad 2C = \frac{xx}{1+x},$$

$$4. \quad 6D = \frac{x^3}{1+x},$$

$$5. \quad 24E = \frac{x^4}{(1+x)^2},$$

$$6. \quad 120F = \frac{x^5}{(1+x)^2},$$

$$7. \quad 720G = \frac{x^6}{(1+x)^3}$$

etc.

4. Lex, qua hi valores ordine progrediuntur, satis est manifesta, cum quilibet terminus prodit, si praecedens vel per x vel per $\frac{x}{1+x}$ multiplicetur. Quo observato series quacsita sequenti forma expressa reperietur:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{xx}{1+x} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{x^3}{1+x}$$

$$+ \frac{(n+1) \cdots (n-2)}{1 \cdots 4} \frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{(n+2) \cdots (n-2)}{1 \cdots 5} \frac{x^5}{(1+x)^2}$$

$$+ \frac{(n+2) \cdots (n-3)}{1 \cdots 6} \frac{x^6}{(1+x)^3} + \text{etc.};$$

et distinguamus terminos ordine pares ab imparibus, ut seriem obtineamus, eritque

$$(1+x)^n = \begin{cases} 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(n+1) \cdots (n-2)}{1 \cdots 4} x^4 + \frac{(n+2) \cdots (n-3)}{1 \cdots 6} x^6 + \cdots \\ + x \left(n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \frac{(n+2) \cdots (n-2)}{1 \cdots 5} x^4 + \cdots \right) \end{cases}$$

atque ob insignem ordinem, quo termini utriusque seriei procedunt, tuto concludere licet, eas esse veritati consentaneas. Quoniam veritas per solam inductionem est conclusa, utique rigidiori demonstratione quam iam sum investigaturus.

5. Interim tamen statim casus memorabilis se offert, quo series egregie confirmatur, scilicet si exponens n statuatur infinitum, simul vero x infinite parvum, ita tamen ut productum nx sit quoddam constans, puta u ; tum enim constat esse

$$\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = e^u.$$

Hoc autem casu series inventa sequentem inducit formam:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1 \cdot 2} + \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{u^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.},$$

quae series, ut cuique constat, veritati est consentanea.

6. Ut autem in demonstrationem completam inquiramus, quomodo

$$\frac{xx}{1+x} = xx,$$

$$x = \frac{zz + z\sqrt{zz+4}}{2}.$$

hanc fractionem tollendam statuamus $z = 2y$, ut fiat

$$x = 2yy + 2y\sqrt{yy+1},$$

ecque fit

$$1+x = 1+2yy+2y\sqrt{yy+1} = (y+\sqrt{1+yy})^2,$$

ut potestas nostra proposita evadat

$$(y+\sqrt{1+yy})^{2^n}.$$

igitur ista formula $y+\sqrt{1+yy}$ frequentissime occurret, brevitatis gratia
namus

$$y+\sqrt{1+yy} = v,$$

potestas evolvenda sit v^{2^n} .

7. Cum igitur ista potestas v^{2^n} aequetur binis seriebus supra exhibitis,
priore statuamus

$$s = 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} zz + \frac{(n+1) \cdots (n-2)}{1 \cdots 4} z^4 + \frac{(n+2) \cdots (n-3)}{1 \cdots 6} z^6 + \text{etc.},$$

altera vero statuamus

$$\frac{tx}{z} = nx + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} xz^2 + \frac{(n+2) \cdots (n-2)}{1 \cdots 5} xz^4 + \text{etc.},$$

fiat

$$t = nz + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \frac{(n+2) \cdots (n-2)}{1 \cdots 5} z^5 + \text{etc.},$$

series praecedenti magis est assimilata. Hinc igitur habebimus

$$v^{2^n} = s + \frac{tx}{z}.$$

$$x = 2yy + 2y\sqrt{1 + yy} = 2yv,$$

habebimus

$$\frac{x}{z} = v,$$

et aequatio nostra iam erit

$$v^{2n} = s + tv.$$

Ut nunc hanc aequationem per differentiationem tractemus,

$$\partial v = \partial y + \frac{y \partial y}{\sqrt{1 + yy}} = \frac{v \partial y}{\sqrt{1 + yy}}.$$

Vicissim autem y per v ita exprimitur, ut sit

$$y = \frac{vv - 1}{2v}$$

hincque porro

$$\sqrt{1 + yy} = \frac{vv + 1}{2v}.$$

Tum vero differentiendo erit

$$\partial y = \frac{\partial v(vv + 1)}{2vv},$$

qui valor egregie convenit cum eo, quem praecedens formula praeberet, unde fit

$$\partial y = \frac{\partial v}{v} \sqrt{1 + yy} = \frac{\partial v(vv + 1)}{2vv}.$$

9. Cum iam potestas nostra v^{2n} aequetur duabus serieb-
teram per s alteram per tv denotavimus, notasse hic iuvabit
 s , complecti terminos rationales, alteram vero terminos omnes
rationales. Hoc observato aequationis inventae primo sumam
ut habeamus

$$2nlv = l(s + tv),$$

untis differentialibus orit

$$\frac{2n\partial v}{v} = \frac{\partial s + v\partial t + t\partial v}{s + tv}.$$

autem sit

$$v = y + \sqrt{1 + yy}$$

$$\partial v = \frac{v\partial y}{\sqrt{1 + yy}},$$

hac substitutione orietur haec aequatio:

$$\frac{2n\partial y}{\sqrt{1 + yy}} = \frac{\partial s\sqrt{1 + yy} + y\partial t\sqrt{1 + yy} + \partial t(1 + yy) + ty\partial y + t\partial y\sqrt{1 + yy}}{(s + ty + t\sqrt{1 + yy})\sqrt{1 + yy}},$$

sublatis fractionibus hanc induet formam:

$$\begin{aligned} & 2ns\partial y + 2nty\partial y + 2nt\partial y\sqrt{1 + yy} \\ & = \partial s\sqrt{1 + yy} + y\partial t\sqrt{1 + yy} + \partial t(1 + yy) + ty\partial y + t\partial y\sqrt{1 + yy}, \end{aligned}$$

seorsim aequando partes rationales et irrationales nascuntur hae duae aequationes:

$$\text{I. } 2ns\partial y + (2n - 1)ty\partial y = \partial t + yy\partial t,$$

$$\text{II. } (2n - 1)t\partial y = \partial s + y\partial t.$$

10. Ut harum aequationum prior simplicior reddatur, ab ea subtrahatur prior per y multiplicata, eiusque loco prodibit ista:

$$2ns\partial y = \partial t - y\partial s.$$

haec aequatio cum hac combinanda erit

$$(2n - 1)t\partial y = \partial s + y\partial t.$$

videamus, an ex his duabus aequationibus pro litteris s et t easdem derivare queamus, quas supra per inductionem elicuimus. Quoniam

13. Eodem modo tractetur altera aequatio,

$$2ns + \frac{z\partial s}{\partial z} - \frac{2\partial t}{\partial z} = 0,$$

per substitutionem serierum fictarum supra datarum fiet

$$\begin{aligned} 2ns &= 2n + 2nAz^2 + 2nBz^4 + 2nCz^6 + 2nDz^8 + \text{etc.}, \\ + \frac{z\partial s}{\partial z} &= + 2A + 4B + 6C + 8D + \text{etc.}, \\ - \frac{2\partial t}{\partial z} &= - 2\alpha - 6\beta - 10\gamma - 14\delta - 18\varepsilon - \text{etc.} \end{aligned}$$

quae ergo fluunt sequentes determinationes:

$$\begin{aligned} \alpha &= n, & \beta &= \frac{n+1}{3}A, & \gamma &= \frac{n+2}{5}B, \\ \delta &= \frac{n+3}{7}C, & \varepsilon &= \frac{n+4}{9}D, & \zeta &= \frac{n+5}{11}E \\ & & & & & \text{etc.} \end{aligned}$$

14. Cum nunc litterarum graecarum prima $\alpha = n$ sit cognita, alternatim superiores determinationes consulendo sequentes valores reperientur:

$$\begin{aligned} \alpha &= n, & A &= \frac{n(n-1)}{2}, \\ \beta &= \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, & B &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \\ \gamma &= \frac{(n+2) \cdots (n-2)}{1 \cdots 5}, & C &= \frac{(n+2) \cdots (n-3)}{1 \cdots 6}, \\ \delta &= \frac{(n+3) \cdots (n-3)}{1 \cdots 7}, & D &= \frac{(n+3) \cdots (n-4)}{1 \cdots 8} \\ & \text{etc.} & & \text{etc.} \end{aligned}$$

monstratum igitur nunc est legem progressionis, quam supra quasi divi-
o attulimus, cum veritate perfecte consentire.

$$(1+x)^n = v^{2n} = s + t \frac{x}{z},$$

quaestio hic omni attentione digna occurrit, quinam prodituri si pro utraque littera s et t seorsim sumta, quam investigationem in problemate sum suscepturus.

PROBLEMA

Propositis his duabus seriebus:

$$s = 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{(n+1) \cdots (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} z^4 + \text{etc.},$$

$$t = \frac{n}{1} z + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \frac{(n+2) \cdots (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} z^5 + \text{etc.}$$

investigare utriusque summam.

SOLUTIO

16. Determinatio harum duarum summarum repetenda est aequationibus differentialibus supra inventis, dum loco x et ∂x s et $2\partial y$:

$$(2n-1)t\partial y = \partial s + y\partial t,$$

$$2ns\partial y = \partial t - y\partial s.$$

Hic quidem iterum posset alterutra litterarum s et t eliminari, perveniretur ad aequationem differentialem secundi gradus; verum labore supersedere poterimus. Utamur scilicet tantum aequatione forma relata:

$$\partial s = 2nt\partial y - \partial \cdot ty,$$

cum qua combinemus aequationem principalem

$$v^{2n} = s + tv,$$

fit

$$s = v^{2n} - tv$$

que

$$\partial s = 2nv^{2n-1}\partial v - \partial \cdot tv = 2nt\partial y - \partial \cdot ty.$$

vero

$$\partial \cdot tv - \partial \cdot ty = \partial \cdot t(v - y) = \partial \cdot t\sqrt{1 + yy}$$

no habebimus

$$2nv^{2n-1}\partial v = 2nt\partial y + \partial t\sqrt{1 + yy} + \frac{ty\partial y}{\sqrt{1 + yy}},$$

aequatio per $\sqrt{1 + yy}$ divisa dat

$$\partial t + \frac{ty\partial y}{1 + yy} + 2nt\frac{\partial y}{\sqrt{1 + yy}} = \frac{2nv^{2n-1}\partial v}{\sqrt{1 + yy}}.$$

vero est

$$\frac{\partial y}{\sqrt{1 + yy}} = \frac{\partial v}{v},$$

atio nostra erit

$$\partial t + \frac{ty\partial y}{1 + yy} + 2nt\frac{\partial v}{v} = \frac{2nv^{2n-1}\partial v}{\sqrt{1 + yy}},$$

multiplicata per $v^{2n}\sqrt{1 + yy}$ reddet membrum sinistrum integrabile, eritque

$$\partial \cdot tv^{2n}\sqrt{1 + yy} = 2nv^{2n-1}\partial v,$$

ergo integrale erit

$$tv^{2n}\sqrt{1 + yy} = \frac{1}{2}v^{2n} + \frac{C}{2},$$

equenter habebimus

$$t = \frac{v^{2n} + Cv^{-2n}}{2\sqrt{1 + yy}}.$$

17. Iam pro constante C , quia casu $y = 0$ et $v = 1$ fieri debet $t = 0$, $C = -1$, ita ut sit

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1 + yy}},$$

$$\sqrt{1 + yy} = \frac{vv + 1}{2v},$$

quo substituto reperietur

$$s = \frac{v^{2n} + v^{2-2n}}{vv + 1}.$$

Interim tamen etiam videamus, quomodo aequationem differentialem memoratam tractari oporteat.

ALIA SOLUTIO EX DIFFERENTIALIBUS SECUNDI GRADUS PETITA

18. Cum nostrae binae aequationes differentiales sint

$$\partial s = 2nt\partial y - \partial \cdot ty,$$

$$\partial t = 2ns\partial y + y\partial s,$$

erit ex prioribus

$$s = 2n \int t \partial y - ty,$$

quibus valoribus in altera substitutis fiet

$$\partial t = 4nn\partial y \int t \partial y - y \partial \cdot ty,$$

quae evoluta dat

$$\partial t = 4nn\partial y \int t \partial y - ty \partial y - yy \partial t.$$

19. Ut hinc signum summatorium tollamus, statuamus

$$\int t \partial y = u,$$

ut sit

$$t = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad \partial t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

is valoribus substitutis prodit

$$\frac{\partial \partial u}{\partial y}(1 + yy) + y \partial u = 4nnu \partial y,$$

in aequationem ponendo

$$u = e^{\int p \partial y}$$

$$\partial u = p \partial y e^{\int p \partial y}$$

$$\partial \partial u = (\partial p \partial y + pp \partial y \partial y) e^{\int p \partial y}$$

differentialia prima reducere licet; erit enim

$$(\partial p + pp \partial y)(1 + yy) + py \partial y = 4nn \partial y$$

$$\partial p + pp \partial y + \frac{py \partial y}{1 + yy} = 4nn \frac{\partial y}{1 + yy}.$$

20. Ut nunc primum terminum et tertium in unum contrahamus, ponamus

$$p = \frac{q}{\sqrt{1 + yy}},$$

hinc aequatio

$$\frac{\partial q}{\sqrt{1 + yy}} + \frac{qq \partial y}{1 + yy} = 4nn \frac{\partial y}{1 + yy}$$

$$\frac{\partial q}{\sqrt{1 + yy}} = \frac{(4nn - qq) \partial y}{1 + yy},$$

commode separationem admittit; evidens enim est prodire

$$\frac{\partial q}{4nn - qq} = \frac{\partial y}{\sqrt{1 + yy}},$$

aequatio per $4n$ multiplicata et integrata dat

$$l \frac{2n + q}{2n - q} = 4n \int \frac{\partial y}{\sqrt{1 + yy}} =$$

21. Hinc igitur ob

$$p = \frac{q}{\sqrt{1+yy}}$$

erit

$$p\partial y = \frac{q\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{q\partial v}{v}$$

ideoque

$$p\partial y = \frac{2n(Cv^{2n}-1)\partial v}{v(Cv^{2n}+1)},$$

quae expressio resolvitur in has partes:

$$p\partial y = -\frac{2n\partial v}{v} + \frac{2n Cv^{2n-1}\partial v}{Cv^{2n}+1},$$

cuius ergo integrale erit

$$\int p\partial y = -2nlv + l(Cv^{2n}+1) + ll.$$

consequenter erit

$$e^{\int p\partial y} = \frac{D}{v^{2n}}(1+Cv^{2n}) = Dv^{-2n} + CDv^{2n}$$

22. Cum igitur sit

$$u = \int t\partial y \quad \text{ideoque} \quad t = \frac{\partial u}{\partial y},$$

per differentiationem mutatis constantibus arbitrariis re

$$t = \frac{Ev^{-2n} + Fv^{2n}}{\sqrt{1+yy}}.$$

Ad constantes autem definiendas primo notetur posito debere $t=0$, unde fit

$$F = -E,$$

ut iam sic

$$t = \frac{E}{\sqrt{1+yy}}(v^{-2n} - v^{+2n}).$$

inde vero si y fuerit infinite parvum, fieri debet

$$t = nz = 2ny,$$

n vero evadit

$$v = 1 + y \quad \text{et} \quad v^{-1} = 1 - y$$

quoque

$$v^{2n} = 1 + 2ny \quad \text{et} \quad v^{-2n} = 1 - 2ny,$$

quibus valoribus fiet

$$2ny = -4nEy, \quad \text{ergo} \quad E = -\frac{1}{2},$$

que nanciscimur pro t eundem valorem ac supra invenimus, scilicet

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}},$$

quo porro ut ante derivatur

$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

SOLUTIO FACILLIMA PROBLEMATIS

23. Hanc solutionem derivabimus ex sola aequatione

$$v^{2n} = s + tv,$$

qua ob

$$v = y + \sqrt{1+yy}$$

tera s complectitur potestates pares ipsius y , t vero impares. Sumto igitur negative littera s manet eadem, littera t vero abit in $-t$; tum autem eo v habebimus

$$-y + \sqrt{1+yy} = v^{-1}.$$

$$v^{-2n} = s - \frac{t}{v},$$

qua aequatione cum principali $v^{2n} = s + tv$ coniuncta, fit

$$v^{2n} - v^{-2n} = tv + \frac{t}{v},$$

unde fit

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}},$$

et hinc reperietur

$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

Cum enim ex prima aequatione sit

$$t = v^{2n-1} - \frac{s}{v},$$

ex altera vero

$$-t = v^{1-2n} - vs,$$

hi valores invicem coaequati dabunt

$$\frac{s(vv+1)}{v} = v^{2n-1} + v^{1-2n},$$

unde ob

$$\frac{vv+1}{v} = 2\sqrt{1+yy}$$

erit

$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

24. Transferamus denique haec omnia ad ipsam potestatem
cum sit

et

$$1+x=vv$$

$$\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v} = \frac{x+2}{2\sqrt{1+x}},$$

$$2V(1+yy) = \frac{x+2}{V(1+x)},$$

tribus substitutis fiet

$$s = \frac{1(1+x)}{x+2} = \left((1+x)^{n-\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}-n} \right),$$

$$t = \frac{1(1+x)}{x+2} = \left((1+x)^n - (1+x)^{-n} \right)$$

$$s = \frac{(1+x)^n + (1+x)^{1-n}}{x+2},$$

$$t = \frac{(1+x)^{n+\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}-n}}{x+2}.$$

tertia serie deducitur

$$\frac{tx}{z} = tV(1+x),$$

et seriei erit

$$\frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)^{1-n}}{2+1+x},$$

summa terminorum ordine parium in serie pro potestate $(1+x)^n$

DE FRACTIONIBUS CONTINUIS W

Conventui exhibuit die 7. Februarii 1780

Commentatio 745 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 6 (1812)

1. Postquam BROUNCKERUS²⁾³⁾ memorabilem suam fractionem quadratura circuli invenisset eamque sine demonstratione communicasset, hic plurimum studii in eo collocavit, ut fontem hanc insignem formulam hausisset, detegeret. Auctorem enim usum fuisse egregiis illis formulis, quas ipse in optima infinitorum eruerat. Quin etiam indo per calculos struosos non solum BROUNCKERI fractionem continuam, sed et alias similes elicit, quae utique, perinde ac BROUNCKERI indicandae, ut oblivioni eripiantur.

2. Quae autem ex WALLISH Arithmetica infinitarum inventam Analysin infinitorum in lucem edita, huc pertinet quidem recepto ita repraesentari possunt, ut, formulis in $x=0$ usque ad $x=1$ extensis, sequentes quadraturae ex

1) Confer hac cum dissertatione praeter *Introductionem in analysin* 17, 123, 522, 593, *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. I₈ p. 362; vol. I₉ p. 314 et 661. C. B.

2) Vide notam ad p. 189 vol. I₁₄ adiectam. C. B.

3) Editio princeps hic et passim: BROUNCKERUS. C. B.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^0 dx}{V(1-xx)} &= 1 &= \frac{1}{1}, \\
\int \frac{x^2 dx}{V(1-xx)} &= \frac{2}{3} &= \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3}, \\
\int \frac{x^4 dx}{V(1-xx)} &= \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \\
\int \frac{x^6 dx}{V(1-xx)} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}, \\
\int \frac{x^8 dx}{V(1-xx)} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

3. Istas formulas in tertia columna ita adornavi, ut denominatores interpolationem manifesto admittant; sicque tantum superest, ut etiam numeratores ita transformentur, ut pariter interpolationem patiantur, id quod fiet, si series secundum legem uniformem progrediens, scilicet A, B, C, D, E etc. investigetur, ut sit:

$$AB = 1 \cdot 1, \quad BC = 2 \cdot 2, \quad CD = 3 \cdot 3, \quad DE = 4 \cdot 4 \text{ etc.},$$

mod est id ipsum, in quo Wallisus summam ingenii sagacitatem manifestavit, quam autem investigationem deinceps multo generalius et calculo et faciliori sum expediturus.

4. Hac autem serie litterarum A, B, C, D etc. inventa totum negotium nunc erit confectum. Cum enim sit, uti sequens tabula declarat:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^0 dx}{V(1-xx)} &= 1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{A}{1}, \\
\int \frac{x^2 dx}{V(1-xx)} &= \frac{BC}{2 \cdot 3} &= \frac{1}{A} \cdot \frac{ABC}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \\
\int \frac{x^4 dx}{V(1-xx)} &= \frac{BCDE}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} &= \frac{1}{A} \cdot \frac{ABCDE}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \\
\int \frac{x^6 dx}{V(1-xx)} &= \frac{BCDEFG}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} &= \frac{1}{A} \cdot \frac{ABCDEFGH}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot 1,$$

$$\int \frac{xx \partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{AB}{1 \cdot 2},$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{ABCD}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{ABCDE}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

etc.

5. Cum nunc sit

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2}$$

denotante π peripheriam circuli, cuius diameter =
 gratia scribamus $q = \frac{\pi}{2}$, omnes litterarum A, B, C
 quantitatem q sequenti modo exprimentur:

$A = \frac{1}{q}$	$= 0,636620$	Diff.
$B = q$	$= 1,570796$	0,9
$C = \frac{4}{q}$	$= 2,546479$	0,9
$D = \frac{9q}{4}$	$= 3,534292$	0,9
$E = \frac{4 \cdot 16}{9q}$	$= 4,527074$	0,9
$F = \frac{9 \cdot 25}{4 \cdot 16} q$	$= 5,522331$	0,9

etc.

6. Hic tertiam adiunxi columnam, quae valorum
 rarum exhibet, quo clarius appareat, quemadmodum

em uniformem incrementum, quod non evenisset, si loco q valorem falsum cepissem. His expositis methodum multo faciliorem tradam, qua pro similibus his litteris fractiones continuas reperiri possunt, atque eadem opera hanc investigationem multo generaliore instituiam, dum sequens problema sum soluturus.

PROBLEMA

Invenire seriem litterarum A, B, C, D etc. uniformi lege procedentem, ita sit

$$AB = ff, \quad BC = (f + a)^2, \quad CD = (f + 2a)^2 \text{ etc.}$$

SOLUTIO

7. Hinc statim patet, qualis functio fuerit A ipsius f , talem esse debere functionem ipsius $f + a$, tum vero C ipsius $f + 2a$, D ipsius $f + 3a$ et porro. Hac lege observata si statuamus

$$A = f - \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}s}{A'},$$

ni debet

$$B = f + \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}s}{B'},$$

litterae A' et B' eandem inter se rationem tenere debent, ita ut ex A' fiat B' , si loco f scribatur $f + a$. Cum igitur fractionibus sublati sit

$$2A = 2f - a + \frac{s}{A'} \quad \text{et} \quad 2B = 2f + a + \frac{s}{B'}.$$

earum formularum productum ipsi $4ff$ est aequandum, unde oritur haec aequatio a fractionibus liberata:

$$aaA'B' - A's(2f - a) - B's(2f + a) - ss = 0.$$

quae commodè per factores representari poterit.

$$(A' - 2f - a)(B' - 2f + a) = 4ff.$$

8. Quia nunc, si ambae litterae A' et B' essent aequales¹⁾, ex foret $A' = B' = 4f$, legem supra allatam sequentes statuamus:

$$A' = 4f - 2a + \frac{s'}{A''}$$

et

$$B' = 4f + 2a + \frac{s'}{B''},$$

quibus substitutis ultima aequatio induet hanc formam:

$$\left(2f - 3a + \frac{s'}{A''}\right)\left(2f + 3a + \frac{s'}{B''}\right) = 4ff.$$

Facta igitur evolutione et sublati fractionibus orietur sequens

$$9aaA''B'' - A''s'(2f - 3a) - B''s'(2f + 3a) - s's' = 0.$$

Sumatur ergo hic $s' = 9aa$, ut habeatur ista [aequatio]:

$$A''B'' - A''(2f - 3a) - B''(2f + 3a) = 9aa,$$

quae iterum per factores hoc modo representari potest:

$$(A'' - 2f - 3a)(B'' - 2f + 3a) = 4ff.$$

9. Cum nunc iterum medius valor inter A'' et B'' sit $4f$, sta-

$$A'' = 4f - 2a + \frac{s''}{A'''} \quad \text{et} \quad B'' = 4f + 2a + \frac{s''}{B'''},$$

1) Scilicet: omisso a ; confor § 18. C. B.

facta substitutione emerget ista aequatio:

$$(2f - 5a + \frac{s''}{A''})(2f + 5a + \frac{s''}{B''}) = 4ff.$$

ita igitur evolutione sublatisque fractionibus erit

$$25aaA'''B''' - A'''s''(2f - 5a) - B'''s''(2f + 5a) - s''s'' = 0.$$

quatur $s'' = 25aa$, et ista aequatio hanc induet formam:

$$A'''B''' - A'''(2f - 5a) - B'''(2f + 5a) = 25aa,$$

per factores hoc modo representari potest:

$$(A''' - 2f - 5a)(B''' - 2f + 5a) = 4ff.$$

10. Statuatur denno, ut ante,

$$A''' = 4f - 2a + \frac{s'''}{A^{IV}} \quad \text{et} \quad B''' = 4f + 2a + \frac{s'''}{B^{IV}}$$

uo facta substitutione

$$(2f - 7a + \frac{s'''}{A^{IV}})(2f + 7a + \frac{s'''}{B^{IV}}) = 4ff,$$

aequatione evoluta et in ordinem redacta obtinetur

$$A^{IV}B^{IV} - A^{IV}(2f - 7a) - B^{IV}(2f + 7a) = 49aa,$$

scilicet posuimus $s''' = 49aa$; tum vero per factores erit

$$(A^{IV} - 2f - 7a)(B^{IV} - 2f + 7a) = 4ff.$$

perspicuum est, quomodo hae operationes sint ulterius continuandae.

pro $2A$ adipiscemur sequentem fractionem continuam.

$$2A = 2f - a + \frac{aa}{4f - 2a + \frac{9aa}{4f - 2a + \frac{25aa}{4f - 2a + \frac{49aa}{4f - 2a + \dots}}}}$$

ubi, si loco f ordine scribamus $f + a$, $f + 2a$, $f + 3a$ etc. continuæ prodibunt pro $2B$, $2C$, $2D$ etc., quæ ita se habent

$$2B = 2f + a + \frac{aa}{4f + 2a + \frac{9aa}{4f + 2a + \frac{25aa}{4f + 2a + \frac{49aa}{4f + 2a + \dots}}}}$$

$$2C = 2f + 3a + \frac{aa}{4f + 6a + \frac{9aa}{4f + 6a + \frac{25aa}{4f + 6a + \frac{49aa}{4f + 6a + \dots}}}}$$

$$2D = 2f + 5a + \frac{aa}{4f + 10a + \frac{9aa}{4f + 10a + \frac{25aa}{4f + 10a + \frac{49aa}{4f + 10a + \dots}}}}$$

etc.

12. Quodsi iam hic ponamus $f = 1$ et $a = 1$, pro WALLISIO tractatus, unde fractiones continuæ a WALLISIO valoribus per quadraturam circuli expressis erunt sequen-

FRACTIONES CONTINUAE WALLISIANAE

$$2A = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \text{etc.}}}}} = \frac{2}{q} = \frac{4}{\pi},$$

$$2B = 3 + \frac{1}{6 + \frac{9}{6 + \frac{25}{6 + \frac{49}{6 + \text{etc.}}}}} = 2q = \pi,$$

$$2C = 5 + \frac{1}{10 + \frac{9}{10 + \frac{25}{10 + \frac{49}{10 + \text{etc.}}}}} = \frac{8}{q} = \frac{16}{\pi},$$

$$2D = 7 + \frac{1}{14 + \frac{9}{14 + \frac{25}{14 + \frac{49}{14 + \text{etc.}}}}} = \frac{9q}{2} = \frac{9\pi}{4},$$

$$2E = 9 + \frac{1}{18 + \frac{9}{18 + \frac{25}{18 + \frac{49}{18 + \text{etc.}}}}} = \frac{128}{9q} = \frac{256}{9\pi},$$

rum prima est ipsa fractio continua a BROUNCKERO inventa.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \frac{1}{4},$$

quae vulgo LEIBNITIO tribui solet, multo autem antea a JACOBO GREGORIO
 eruta, a quo BROUNCKERUS eam nosse poterat, derivasse, quippe quod per
 rationes satis faciles et obvias fieri potuit sequentem in modum:

Posito	erit
$\frac{\pi}{4} = 1 - \alpha$	$\frac{4}{\pi} = \frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}}$
$\alpha = \frac{1}{3} - \beta$	$\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{1 - 3\beta} = 3 + \frac{9\beta}{1 - 3\beta} = 3 + \frac{9}{3 + \frac{1}{\beta}}$
$\beta = \frac{1}{5} - \gamma$	$\frac{1}{\beta} = \frac{5}{1 - 5\gamma} = 5 + \frac{25\gamma}{1 - 5\gamma} = 5 + \frac{25}{5 + \frac{1}{\gamma}}$
$\gamma = \frac{1}{7} - \delta$	$\frac{1}{\gamma} = \frac{7}{1 - 7\delta} = 7 + \frac{49\delta}{1 - 7\delta} = 7 + \frac{49}{7 + \frac{1}{\delta}}$
etc.	etc.

Quodsi iam hic loco $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ etc. valores modo inventi substituuntur,
 se offert ipsa fractio continua BROUNCKERI, siquidem hinc sequitur fore

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \text{etc.}}}}}$$

14. Quod autem ad nostram problematis solutionem generalem a
 etiam singularum fractionum continuarum valores per certas quadratur
 primere licet, id quod in sequente problemate ostendamus.

1) Vide LEONHARDI EULERI Opera omnia, vol. I, 4, imprimis notam ad p. 79 adiectam.

PROBLEMA

proposita serie A, B, C, D etc. secundum legem uniformem procedente, ita

$$AB = ff, \quad BC = (f + a)^2, \quad CD = (f + 2a)^2 \text{ etc.,}$$

rum harum litterarum valores primo quidem per producta continui, tum vero formulas integrales expressas investigare.

SOLUTIO

1. Cum igitur sit

$$A = \frac{ff}{B}, \quad B = \frac{(f + a)^2}{C}, \quad C = \frac{(f + 2a)^2}{D} \text{ etc.,}$$

oribus continuo substitutio reperietur

$$A = \frac{ff(f + 2a)^2(f + 4a)^2(f + 6a)^2 \text{ etc.}}{(f + a)^2(f + 3a)^2(f + 5a)^2 \text{ etc.}}$$

ritum. Cum autem hoc modo nullus determinatus valor oriatur, quocumque abruptatur, vel in numeratoribus vel in denominatoribus redundat, hoc incommodum tollitur, si factores simplices sequenti modo munus:

$$A = f \cdot \frac{f(f + 2a)}{(f + a)(f + a)} \cdot \frac{(f + 2a)(f + 4a)}{(f + 3a)(f + 3a)} \cdot \frac{(f + 4a)(f + 6a)}{(f + 5a)(f + 5a)} \cdot \text{etc.}$$

in membra continuo propius ad unitatem accedent et in infinitum ipsi aequabuntur, sicque ista expressio utique determinatum valorem habebit.

2. Quo autem ostendamus, quomodo eius valorem ad formulas integrales oporteat, in subsidium vocemus hoc lemma:

Integralibus ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensis erit

$$\int_0^1 \frac{x^{m+k-1} dx}{(1-x^n)^{m+k}} = \frac{m+k}{m} \cdot \frac{m+k+n}{m+n} \cdot \frac{m+k+2n}{m+2n} \cdot \frac{m+k+3n}{m+3n} \cdot \dots \cdot \frac{m+k+4n}{m+4n} \cdot \dots \cdot \int_0^1 \frac{x^n dx}{(1-x^n)^{m+k}}.$$

tum vero sumto $m = f$ et $k = a$ habebimus

$$\int \frac{x^{f-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \frac{f+a}{f} \cdot \frac{f+3a}{f+2a} \cdot \frac{f+5a}{f+4a} \cdot \dots \cdot \int \frac{x^{\infty} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}},$$

quae expressio, inversa, praebet priores singulorum membrorum fa-
posterioribus sumamus $m = f + a$ manente $k = a$, hocque facto er

$$\int \frac{x^{f+a-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \frac{f+2a}{f+a} \cdot \frac{f+4a}{f+3a} \cdot \frac{f+6a}{f+5a} \cdot \dots \cdot \int \frac{x^{\infty} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

17. Evidens nunc est posteriorem formulam per priorem divi-
nostrum productum continuum exhibere, quo pacto ambo integru-
tesima se mutuo tollunt, consequenter habemus

$$A = \int \frac{x^{f+a-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

Simili modo protinus

$$B = \int \frac{x^{f+2a-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f+a-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}},$$

$$C = \int \frac{x^{f+3a-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f+2a-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

etc.

At vero haec investigatio adhuc generalior reddi potest, quemadmodu-
problema docebit.

PROBLEMA GENERALIUS

Invenire seriem uniformi lege procedentem A, B, C, D etc., ita

$$AB = ff + c, \quad BC = (f+a)^2 + c, \quad CD = (f+2a)^2 + c,$$

$$DE = (f+3a)^2 + c \quad \text{etc.,}$$

ubi in singulis productis littera f quantitate a augeatur.

SOLUTIO PRIOR PER FRACTIONES CONTINUAS

18. Hic iterum evidens est, qualis A fuerit functio ipsius f , talem esse fore B functionem ipsius $f + a$, C ipsius $f + 2a$, D ipsius $f + 3a$ et ita pro. Cum igitur sit $AB = ff + c$, si A et B essent aequales, omisso c erit $A = B = f$. Quanto igitur A minor accipitur quam f , tanto B debet esse maior; unde posito $A = f - x$ erit $B = f + x$. Quoniam autem B ex A accipitur, si loco f scribatur $f + a$, etiam esse debet $B = f + a - x$, unde concludimus fore $x = \frac{1}{2}a$; sicque partes principales pro A et B erunt

$$A = f - \frac{1}{2}a \quad \text{et} \quad B = f + \frac{1}{2}a$$

$$2A = 2f - a \quad \text{et} \quad 2B = 2f + a$$

eritque pro sequentibus

$$2C = 2f + 3a, \quad 2D = 2f + 5a, \quad 2E = 2f + 7a \quad \text{etc.}$$

19. His valoribus principalibus inventis ponamus revera esse

$$2A = 2f - a + \frac{s}{A}, \quad 2B = 2f + a + \frac{s}{B}.$$

pro s mox idoneus valor emerget. Hinc igitur erit

$$4AB = 4ff - aa + \frac{s}{A}(2f + a) + \frac{s}{B}(2f - a) + \frac{ss}{A'B'} = 4ff + 4c,$$

et aequatio sublati fractionibus hanc induet formam:

$$A'B'(aa + 4c) - A's(2f - a) - B's(2f + a) - ss = 0.$$

ponamus iam $s = aa + 4c$, eritque facta divisione

$$A'B' - A'(2f - a) - B'(2f + a) = aa + 4c,$$

20. Nunc simili modo ut ante ratiocinando intelligitur
aequales, membrum sinistrum fore

$$A'A' - 4fA' = 0 \quad \text{ideoque} \quad A' = B' =$$

Quia autem B' oriri debet ex A' , si loco f scribatur $f' +$
principales fore

$$A' = 4f - 2a \quad \text{et} \quad B' = 4f' + 2a.$$

Revera igitur ponamus esse

$$A' = 4f - 2a + \frac{s'}{A''} \quad \text{et} \quad B' = 4f' + 2a +$$

unde, si hi valores substituuntur, aequatio praecedens per
hanc induet formam:

$$(2f - 3a + \frac{s'}{A''})(2f' + 3a + \frac{s'}{B''}) = 4ff' +$$

quae facta evolutione ad istam perducit aequationem:

$$(4ff' - 9aa) + \frac{s'}{A''}(2f' + 3a) + \frac{s'}{B''}(2f - 3a) + \frac{s's'}{A''B''}$$

haecque sublati fractionibus abit in hanc:

$$A''B''(9aa + 4c) - A''s'(2f' - 3a) - B''s'(2f + 3a)$$

Sumto igitur $s' = 9aa + 4c$ et facta divisione oritur haec

$$A''B'' - A''(2f' - 3a) - B''(2f + 3a) = 9aa +$$

quae per factores representari potest hoc modo:

$$(A'' - 2f' - 3a)(B'' - 2f + 3a) = 4ff' + 4$$

Quia haec aequatio similis est praecedenti iterumque pro casu $A'' = B''$
 et $4f$, statuatur ulterius

$$A'' = 4f - 2a + \frac{s''}{A'''} \quad \text{et} \quad B'' = 4f + 2a + \frac{s''}{B'''},$$

ostroma aequatio per factores foret

$$(2f - 5a + \frac{s''}{A'''})(2f + 5a + \frac{s''}{B'''}) = 4ff + 4c.$$

evolutione sublatisque fractionibus prodit

$$A'''B'''(25aa + 4c) - A'''s''(2f - 5a) - B'''s''(2f + 5a) - s''s'' = 0.$$

igitur $s'' = 25aa + 4c$ et dividendo per s'' fiet

$$A'''B''' - A'''(2f - 5a) - B'''(2f + 5a) = 25aa + 4c$$

productum

$$(A''' - 2f - 5a)(B''' - 2f + 5a) = 4ff + 4c.$$

Statuatur ulterius

$$A''' = 4f - 2a + \frac{s'''}{A^{iv}} \quad \text{et} \quad B''' = 4f + 2a + \frac{s'''}{B^{iv}},$$

rior aequatio per productum substitutis his valoribus erit

$$(2f - 7a + \frac{s'''}{A^{iv}})(2f + 7a + \frac{s'''}{B^{iv}}) = 4ff + 4c,$$

dem operationibus repetitis sumtoque $s''' = 49aa + 4c$ ad sequentem
 r:

$$A^{iv}B^{iv} - A^{iv}(2f - 7a) - B^{iv}(2f + 7a) = 49aa + 4c,$$

factoribus erit

$$(A^{iv} - 2f - 7a)(B^{iv} - 2f + 7a) = 4ff + 4c.$$

us iam abunde liquet, quomodo calculum ulterius proseguiri oporteat.

pro A obtinebimus sequentem fractionem continuam:

$$2A = 2f - a + \frac{aa + 4c}{4f - 2a + \frac{9aa + 4c}{4f - 2a + \frac{25aa + 4c}{4f - 2a + \frac{49aa + 4c}{4f - 2a + \dots}}}}$$

Simili modo hinc erit

$$2B = 2f + a + \frac{aa + 4c}{4f + 2a + \frac{9aa + 4c}{4f + 2a + \frac{25aa + 4c}{4f + 2a + \frac{49aa + 4c}{4f + 2a + \dots}}}}$$

$$2C = 2f + 3a + \frac{aa + 4c}{4f + 6a + \frac{9aa + 4c}{4f + 6a + \frac{25aa + 4c}{4f + 6a + \frac{49aa + 4c}{4f + 6a + \dots}}}}$$

$$2D = 2f + 5a + \frac{aa + 4c}{4f + 10a + \frac{9aa + 4c}{4f + 10a + \frac{25aa + 4c}{4f + 10a + \frac{49aa + 4c}{4f + 10a + \dots}}}}$$

etc.

SOLUTIO ALTERA PER PRODUCTA CONTINUA

24. Cum sit

$$AB = ff + c, \quad BC = (f + a)^2 + c, \quad CD = (f + 2a)^2 + c, \quad DE = (f + 3a)^2 + c, \quad \text{etc.}$$

erit

$$A = \frac{(ff + c)((f + 2a)^2 + c)((f + 4a)^2 + c)((f + 6a)^2 + c) \dots}{((f + a)^2 + c)((f + 3a)^2 + c)((f + 5a)^2 + c) \dots} \text{ etc.}$$

$$A = \frac{ff+c}{(f+a)^2+c} \cdot \frac{(f+2a)^2+c}{(f+3a)^2+c} \cdot \frac{(f+4a)^2+c}{(f+5a)^2+c} \cdot \frac{1}{f}.$$

Quando autem in sequente littera, G , subsistimus, fiet

$$A = \frac{ff+c}{(f+a)^2+c} \cdot \frac{(f+2a)^2+c}{(f+3a)^2+c} \cdot \frac{(f+4a)^2+c}{(f+5a)^2+c} \cdot G.$$

25. Quodsi ergo istae binae expressiones in infinitum continuentur se invicem ducantur, ultimus factor litteralis, qui hic est $\frac{G}{f}$, manifesto aequabitur. Quia vero hoc casu numerus factorum in numeratore redundat, eius factorem primum in fronte seorsim scribamus, atque productum sequenti modo exprimetur:

$$A^2 = (ff+c) \cdot \frac{(ff+c)((f+2a)^2+c)}{((f+a)^2+c)((f+a)^2+c)} \cdot \frac{((f+2a)^2+c)((f+4a)^2+c)}{((f+3a)^2+c)((f+3a)^2+c)} \cdot \text{etc.}$$

ubi iam infinitesimi factores unitati aequabuntur sicque ista expressio formi lege procedit.

Hic autem duos casus distingui conveniet, prouti c fuerit numerus negativus vel positivus.

CASUS 1, QUO $c = -bb$

26. Priore casu quilibet factor in duos resolvi se patietur. Statim igitur primo $c = -bb$, quo casu fractio continua sequenti modo exprimitur potest:

$$2A = 2f - a + \frac{(a+2b)(a-2b)}{4f-2a} + \frac{(3a+2b)(3a-2b)}{4f-2a} + \frac{(5a+2b)(5a-2b)}{4f-2a} + \frac{(7a+2b)(7a-2b)}{4f-2a} + \text{etc.}$$

mulam integram expripi poterunt.

27. Constat enim, si haec formula integralis:

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{(1-x^n)^{n-k}}}$$

ab $x=0$ usque ad $x=1$ extendatur, valorem redni ad sequens infinitum:

$$\frac{m+k}{m} \cdot \frac{m+k+n}{m+n} \cdot \frac{m+k+2n}{m+2n} \dots \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x^n)^{n-k}}}.$$

Quo igitur hanc formam ad nostram expressionem accomodemus, factores in sequenti membro quantitate $2a$ augentur, sumi debet n vero posito $m=f+b$ et $k=a$ reperietur fore

$$\frac{f+a+b}{f+b} \cdot \frac{f+3a+b}{f+2a+b} \cdot \frac{f+5a+b}{f+4a+b} \dots \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \int \frac{x^{f+b-1} dx}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

quae expressio, inversa, priores factores cuiusque membri continet. prioribus autem manento $n=2a$ sumatur $m=f+a-b$ et $k=a$, prodibit haec aequatio:

$$\frac{f+2a-b}{f+a-b} \cdot \frac{f+4a-b}{f+3a-b} \cdot \frac{f+6a-b}{f+5a-b} \dots \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \int \frac{x^{f+a-b-1} dx}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

Si igitur haec aequatio per praecedentem dividatur, postromi fu-

s se mutuo destruent prodibitque productum infinitum in valore A occurrunt per duas formulas integrales expressum, ita ut sit

$$A = (f - b) \cdot \int \frac{x^{f+a-b-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f+b-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

28. Quo haec exemplo illustremus, sumamus $f=2$, $a=1$, $b=1$, ut sumamus hos valores:

$$AB=3, \quad BC=8, \quad CD=15, \quad DE=24 \text{ etc.}$$

quo casu nostra fractio continua evadit

$$2A = 3 - \frac{3}{6 + \frac{5}{6 + \frac{21}{6 + \frac{45}{6 + \frac{77}{6 + \text{etc.}}}}}}$$

per productum continuum erit

$$A = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \text{etc.}$$

vero per formulas integrales habebitur

$$A = \int \frac{x \partial x}{\sqrt{1-xx}} : \int \frac{xx \partial x}{\sqrt{1-xx}}.$$

tat autem pro nostris terminis integrationis, ab $x=0$ usque ad $x=1$,

$$\int \frac{x \partial x}{\sqrt{1-xx}} = 1 \quad \text{et} \quad \int \frac{xx \partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{4},$$

colligitur $A = \frac{4}{\pi}$, id quod cum ipso producto WALLISIANO, quo

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \text{etc.},$$

convenit.

29. Evolvamus nunc quoque alterum casum $c = +bb$,
continua hanc formam induit:

$$2A = 2f - a + \frac{aa + 4bb}{4f - 2a + \frac{9aa + 4bb}{4f - 2a + \frac{25aa + 4bb}{4f - 2a + \frac{49aa + 4bb}{4f - 2a + \dots}}}}$$

At vero productum continuum ex praecedente forma loco b s
ita imaginarie expressum se prodit:

$$A = (f - b\sqrt{-1}) \cdot \frac{(f + b\sqrt{-1})(f + 2a - b\sqrt{-1})}{(f + a + b\sqrt{-1})(f + a - b\sqrt{-1})} \cdot \frac{(f + 2a + b\sqrt{-1})(f + 3a - b\sqrt{-1})}{(f + 3a + b\sqrt{-1})(f + 3a - b\sqrt{-1})}$$

Evidens autem est in eadem expressione § 26 allata etiam loco
 $-b\sqrt{-1}$, unde prodissset

$$A = (f + b\sqrt{-1}) \cdot \frac{(f - b\sqrt{-1})(f + 2a + b\sqrt{-1})}{(f + a - b\sqrt{-1})(f + a + b\sqrt{-1})} \cdot \frac{(f + 2a - b\sqrt{-1})(f + 3a + b\sqrt{-1})}{(f + 3a - b\sqrt{-1})(f + 3a + b\sqrt{-1})}$$

Productum igitur harum duarum expressionum fit reale; erit

$$A^2 = (ff + bb) \cdot \frac{(ff + bb)(f + 2a)^2 + bb}{(f + a)^2 + bb)(f + a)^2 + bb)} \cdot \frac{(f + 2a)^2 + bb)(f + 3a)^2 + bb}{(f + 3a)^2 + bb)(f + 3a)^2 + bb)}$$

quae expressio congruit cum superiore § 25 inventa.

30. At vero etiam expressio per formulas integrales evolvitur.
Si enim in formulis § 27 loco b scribatur $b\sqrt{-1}$, orietur seorsum

$$A = (f - b\sqrt{-1}) \int \frac{x^{f+a-1-b\sqrt{-1}} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f-1+b\sqrt{-1}} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

Verum mutato imaginariorum signo erit

$$A = (f + b\sqrt{-1}) \int \frac{x^{f+a-1+b\sqrt{-1}} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f-1-b\sqrt{-1}} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

ubi nullum est dubium, quin in utraque expressione imaginaria se in destruunt, utiamsi nulla pateat methodus hanc mutuam imaginariorum destructionem actu evolvere.

31. Verum si hae ambae expressiones in se mutuo ducantur, tum destructio haud difficulter ostendi poterit. Cum enim productum sit

$$A^2 = (ff + bb) \cdot \frac{\int x^{f+a-1-bV-1} \partial x}{\int \frac{x^{f-1+bV-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}} \cdot \frac{\int x^{f+a-1+bV-1} \partial x}{\int \frac{x^{f-1-bV-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}},$$

demonstrari potest tam in numeratore quam in denominatore imaginaria seorsim se destruere, quod quidem pro denominatore ostendisse sufficiet, numerator inde oriatur scribendo $f+a$ loco f .

32. Quo demonstratio succinctior reddatur, ponamus brevitatis gratia

$$\frac{x^{f-1} \partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \partial V,$$

quo facto denominator nostrae expressionis imaginariis affectae erit

$$\int x^{+bV-1} \partial V \cdot \int x^{-bV-1} \partial V.$$

Iam statuatur factorum

$$\text{summa} = \int (x^{bV-1} + x^{-bV-1}) \partial V = p,$$

$$\text{differentia} = \int (x^{bV-1} - x^{-bV-1}) \partial V = q,$$

atque notum est productum propositum fore

$$\int x^{bV-1} \partial V \cdot \int x^{-bV-1} \partial V = \frac{pp - qq}{4}.$$

Monstrabo igitur tam pp quam qq ad quantitates reales reduci posse.

$$p = \int (e^{bixV^{-1}} + e^{-bixV^{-1}}) \partial V,$$

$$q = \int (e^{bixV^{-1}} - e^{-bixV^{-1}}) \partial V.$$

Cum igitur noverimus esse

$$e^{pV^{-1}} + e^{-pV^{-1}} = 2 \cos. \varphi$$

et

$$e^{pV^{-1}} - e^{-pV^{-1}} = 2V^{-1} \sin. \varphi,$$

posito brevitatis gratia $bix = \varphi$ fiet

$$p = 2 \int \partial V \cos. \varphi \quad \text{et} \quad q = 2V^{-1} \int \partial V \sin. \varphi,$$

unde sponte fluit denominator

$$\frac{pp - qq}{4} = \left(\int \partial V \cos. \varphi \right)^2 + \left(\int \partial V \sin. \varphi \right)^2,$$

expressio, quae manifesto est realis.

34. Hinc facile colligitur valor numeratoris, quippe qui oritur

$$\left(\int x^a \partial V \cos. \varphi \right)^2 + \left(\int x^a \partial V \sin. \varphi \right)^2,$$

ita ut expressio nostra imaginariis turbata pro A^2 sequenti modo representetur:

$$A^2 = (ff + bb) \frac{(fx^a \partial V \cos. \varphi)^2 + (fx^a \partial V \sin. \varphi)^2}{(\int \partial V \cos. \varphi)^2 + (\int \partial V \sin. \varphi)^2}$$

existente

$$\partial V = \frac{x^{f-1} \partial x}{V^{1-x^2a}} \quad \text{et} \quad \varphi = bix.$$

35. In analysi autem adhuc desideratur methodus per quam tractandi huiusmodi formulas:

$$\int \frac{x^{f-1} \partial x \cos. bix}{V^{1-x^2a}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^{f-1} \partial x \sin. bix}{V^{1-x^2a}}.$$

rim tamen si denominator abesset, utraque formula revera integrari posset, quod sequenti modo ostendisse operae pretium erit.

36. Praestari enim hoc poterit ope reductionis notissimae

$$\int P \partial Q = PQ - \int Q \partial P.$$

scilicet pro formula priore sumatur

$$P = \cos. bx \quad \text{et} \quad \partial Q = x'^{-1} \partial x,$$

$$\int x'^{-1} \partial x \cos. bx = \frac{x'}{f} \cos. bx + \frac{b}{f} \int x'^{-1} \partial x \sin. bx.$$

altera vero, sumto

$$P = \sin. bx \quad \text{et} \quad \partial Q = x'^{-1} \partial x,$$

$$\int x'^{-1} \partial x \sin. bx = \frac{x'}{f} \sin. bx - \frac{b}{f} \int x'^{-1} \partial x \cos. bx.$$

et porro colligitur substituendo

$$\int x'^{-1} \partial x \cos. bx = \frac{x'}{ff + bb} (f \cos. bx + b \sin. bx),$$

$$\int x'^{-1} \partial x \sin. bx = \frac{x'}{ff + bb} (f \sin. bx - b \cos. bx).$$

vero accedente denominatore nihil aliud intelligitur, nisi integrale ad genus infinitatum maxime transcendentium adhuc ignotum revolvi.

METHODUS SUCCINCTA SUMMAS SERIERUM INFINITARUM PER FORMULAS DIFFERENTIALIALES INVESTIGANDA

Conventui exhibuit die 13. Martii 1780

Commentatio 746 indicis ESESTROMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 5 (1812), 1815, p. 45—

1. Etsi hoc argumentum iam saepius¹⁾ pertractavi, tamen plerumque ad summas commodè exprimendas spectant, per varios libros sunt atque etiam per ambages eruta; quamobrem hic succinctam methodum traditurus, cuius ope seriei cuiuscunque summa facili calculo sine auxilio per formam simplicissimam indagari poterit.

2. Sit igitur X functio quaecunque ipsius x , et X' , X'' , X''' etc. derivantur, si loco x successive scribatur $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ etc. Hae litterae illae X , X' , X'' , X''' etc. mihi designabunt terminos cuiusque seriei indicibus x , $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ etc. respondentes. His positis duabus serierum infinitarum summa contemplaturus, quorum priore termini omnes signo $+$ affecti progrediuntur, ita ut series summanda sit

$$X + X' + X'' + X''' + \text{etc}$$

1) Confer Commentationes 25, 41, 47, 55, 61, 63, 130, 189, 352, 393, 597. Confer per Introductionem in analysin infinitorum, Lausannae 1748, t. I cap. X et Institutiones calculi differentialis, 1755, partis posterioris cap. V; LEONHARDI EULERI Opera omnia, series prima p. 42, 73, 108, 124, 138, 177, 407, 463; vol. 15 p. 70, 91, 701; vol. 8 p. 181; vol. 10 p. 30

pro vero casu iidem termini signis alternantibus procedant, ita ut series
 amanda sit

$$X - X' + X'' - X''' + \text{etc.}$$

igitur duos casus seorsim evolvam.

CASUS I

SUMMATIO SERIEI INFINITAE $S = X + X' + X'' + X''' + \text{etc.}$

3. Denotet S' summam eiusdem seriei primo termino truncatae, ita ut sit

$$S' = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$

cum S sit certa functio ipsius x , quam hic potissimum investigamus, erit
 similis functio ipsius $x + 1$. Evidens ergo est fore $S - S' = X$. Quare
 sit

$$S' = S + \partial S + \frac{1}{2} \partial \partial S + \text{etc.},$$

denominatores, potestates elementi ∂x continentes, ut brevitati consulam,
 termitto, siquidem quasi sponte subintelliguntur, hinc nostra aequatio
 et hanc formam:

$$0 = X + \partial S + \frac{1}{2} \partial \partial S + \frac{1}{6} \partial^3 S + \frac{1}{24} \partial^4 S + \text{etc.}$$

4. Quodsi ergo ista series valde convergat, propemodum erit $\partial S = -X$
 quae $S = -\int X \partial x$, quod integrale per constantem ita est determinandum,
 quanto x infinite magno evanescat, propterea quod termini infinitesimi pro
 o haberi possunt, quia alias series ipsa nullam haberet summam finitam.
 ita propemodum summa, pro vera summa statuamus

$$S = -\int X \partial x - \alpha X - \beta \partial X - \gamma \partial \partial X - \text{etc.}$$

ue hinc

$$\partial S = -X - \alpha \partial X - \beta \partial \partial X - \gamma \partial^3 X - \text{etc.}$$

stituuntur, pervenietur ad sequentem aequationem:

$$\left. \begin{aligned} &+ X - \alpha \partial X - \beta \partial^2 X - \gamma \partial^3 X - \delta \partial^4 X - \text{etc.} \\ &- X - \frac{1}{2} \quad - \frac{1}{2} \alpha \quad - \frac{1}{2} \beta \quad - \frac{1}{2} \gamma \\ &\quad \quad - \frac{1}{6} \quad - \frac{1}{6} \alpha \quad - \frac{1}{6} \beta \\ &\quad \quad \quad - \frac{1}{24} \quad - \frac{1}{24} \alpha \\ &\quad \quad \quad \quad - \frac{1}{120} \end{aligned} \right\} = 0$$

et iam coefficientes incogniti α, β, γ etc. ex sequentibus aequalitatibus finiri debent:

$$\alpha + \frac{1}{2} = 0, \quad \beta + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{6} = 0, \quad \gamma + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{6} \alpha + \frac{1}{24} = 0$$

unde fit

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{12}, \quad \gamma = 0 \quad \text{etc.}$$

5. Hoc autem modo inventio litterarum α, β, γ etc. nimis fore neque tamen ulla lex perspiceretur, qua ulterius progrediantur; modo prorsus singulari in valores istarum litterarum inquirem. scilicet seriem ordinariam secundum eosdem coefficientes procedente

$$V = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.},$$

atque evidens est, si huius seriei summa V ad formam finitam potest, si eadem secundum potestates ipsius z evolatur, eandem seriem sario provenire debere, quo pacto valores litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ inuotescent.

6. Ex relationibus igitur, quas inter litteras $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. supra § 4 allatis, sequentes operationes instituuntur:

$$V = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \epsilon z^5 + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2} z V = + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} \delta + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{6} z z V = + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \alpha + \frac{1}{6} \beta + \frac{1}{6} \gamma + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{24} z^3 V = + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} \alpha + \frac{1}{24} \beta + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{120} z^4 V = + \frac{1}{120} + \frac{1}{120} \alpha + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{720} z^6 V = + \frac{1}{720} + \text{etc.}$$

etc.

scilicet modo omnes termini praeter primum ad nihilum sunt redacti;
ergo

$$V \left(1 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{120} z^4 + \frac{1}{720} z^6 + \text{etc.} \right) = 1.$$

Cum igitur sit

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4 + \text{etc.},$$

$$\frac{V(e^z - 1)}{z} = 1$$

$$V = \frac{z}{e^z - 1};$$

expressio quo facilius iterum in seriem converti queat, ponamus $z = 2t$,

$$V = \frac{2t}{e^{2t} - 1}$$

$$V + t = t \cdot \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1}.$$

statuatur

$$\frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} = u$$

$$u = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}},$$

hinc exponentialibus evolutis erit

$$u = \frac{1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{720}t^6 + \text{etc.}}{t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{5040}t^7 + \text{etc.}},$$

ubi in numeratore solae potestates pares, in denominatoribus states impares occurrunt. Patet autem sumto t quam nunc sequentes vero terminos per potestates t, t^3, t^5 etc. osso p

8. Cum igitur posuerimus

$$u = \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1},$$

erit

$$e^{2t} = \frac{u + 1}{u - 1}$$

ideoque

$$2t = l \frac{u + 1}{u - 1}.$$

Hinc ergo differentiando erit

$$\partial t = - \frac{\partial u}{u u - 1},$$

unde concluditur fore

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u u - 1 = 0.$$

Quia autem novimus primum terminum seriei, qua u exprimitur, sequentium potestatum exponentes binario crescere, statuatur

$$u = \frac{1}{t} + 2At - 2Bt^3 + 2Ct^5 - 2Dt^7 + \text{etc.}$$

substituto sequenti modo:

$$\begin{aligned}
 & 1 \\
 & H \quad + \quad 2A \quad \quad \quad 6BH \quad + \quad 10CH^2 \quad \quad \quad 14DH^3 \quad + \quad 18EH^4 \quad \dots \text{ etc.,} \\
 & + \quad \frac{1}{H} \quad + \quad 4A \quad \quad \quad 4B \quad + \quad 4C \quad \quad \quad 4D \quad + \quad 4E \quad \dots \text{ etc.,} \\
 & \quad \quad \quad + \quad 4AA \quad \quad \quad 8AB \quad + \quad 8AC \quad \dots \quad 8AD \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \quad 4BB \quad \quad \quad 8BC \\
 & 1,
 \end{aligned}$$

ni primi se sponte destrunt, reliqui vero sequentes praebeant deter-

$$\begin{aligned}
 6A &= 1 & \text{ergo } A &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}, \\
 6B &= 4AA & \text{ergo } B &= \frac{2}{5} \cdot 4A = \frac{1}{90}, \\
 4C &= 8AB & \text{ergo } C &= \frac{2}{7} \cdot 2AB = \frac{1}{945}, \\
 8D &= 8AC + 4BB \text{ ergo } D &= \frac{2}{9} (2AC + BB) = \frac{1}{9450}, \\
 2E &= 8(AD + BC) \text{ ergo } E &= \frac{2}{11} (2AD + 2BC) = \frac{1}{93555} \\
 & & \text{etc.}
 \end{aligned}$$

ergo litterae A, B, C, D etc. prorsus eadem sunt, quibus summus potestatum reciprocarum exprimendas sum usus, siquidem

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} &= Ax^2, \\
 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \text{etc.} &= Bx^4, \\
 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \text{etc.} &= Cx^6 \\
 &\text{etc.,}
 \end{aligned}$$

et Commentationes supra laudatas, imprimis 41, 61, 63, 130, 393, 597. C. B.

10. Cum igitur sumserimus

$$u = \frac{1}{t} + 2At - 2Bt^3 + 2Ct^5 - \text{etc.},$$

ob

$$V = tu - t$$

erit

$$V = 1 - t + 2At^2 - 2Bt^4 + 2Ct^6 - 2Dt^8 + \text{etc.},$$

ubi nil aliud superest, nisi ut loco t scribatur $\frac{1}{2}z$, unde prodit

$$V = 1 - \frac{z}{2} + \frac{Azz}{2} - \frac{Bz^4}{8} + \frac{Cz^6}{32} - \frac{Dz^8}{128} + \text{etc.}$$

Cum igitur habuerimus

$$V = 1 + \alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \text{etc.},$$

collatione instituta reperiemus

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}A, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -\frac{1}{8}B, \quad \varepsilon = 0, \quad \zeta = \frac{1}{32}C, \quad \eta =$$

11. Inventis iam valoribus harum litterarum summa seriei propo-

$$S = X + X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$

sequenti modo exprimetur:

$$S = -\int X \partial x + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}A\partial X + \frac{1}{8}B\partial^3 X - \frac{1}{32}C\partial^5 X + \frac{1}{128}D\partial^7 X \\ - \frac{1}{512}E\partial^9 X + \text{etc.},$$

1) In Commentatione 597, *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. I^{us}, p. 712.

si constans adicienda debeat esse infinita, etiam ipsam seriei summam infinitam.

12. Consideremus exemplum, quo $X = \frac{1}{x}$, ita ut huius seriei summam quaerenda:

$$S = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \frac{1}{(x+3)^n} + \text{etc.}$$

Hic igitur erit

$$\int X dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}},$$

quae forma ut evanescat posito $x = \infty$, necesse est, ut exponens n sit tate maior. Alioquin enim, si esset $n = 1$ vel $n < 1$, summa seriei certe infinito magna. Porro vero erit

$$\partial X = -\frac{n}{x^{n+1}}, \quad \text{hinc} \quad \partial^2 X = -\frac{n(n+1)(n+2)}{x^{n+3}}, \quad \partial^3 X = -\frac{n \cdots (n+4)}{x^{n+5}} \text{ etc.}$$

quibus valoribus substitutis summa quaesita erit

$$S = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{2x^n} + \frac{A}{2} \cdot \frac{n}{x^{n+1}} - \frac{B}{8} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{x^{n+3}} + \frac{C}{32} \cdot \frac{n \cdots (n+4)}{x^{n+5}} - \text{etc.}$$

quo series eo magis converget, quo maior accipitur numerus x , praeterea quod litterae A , B , C etc. progressionem valde convergentem constituunt.

13. Quodsi ergo ab unitate incipiendo hi termini

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots + \frac{1}{(x-1)^n}$$

actu colligantur eorumque summa vocetur A , eiusdem seriei in infinitum continuata summa erit $A + S$. Hoc modo olim¹⁾ summas talium seriei infinitarum pro singulis exponentis n valoribus 2, 3, 4, 5 etc. ad plures fig. decimales computavi sumto scilicet $x = 10$, quo pacto calculus satis expediri poterat.

1) Vide Commentationem 47, § 31. *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. I4, p. 121.

14. Quodsi igitur index x unitate augeatur, habebimus

$$S' = X' - X'' + X''' - X^{IV} + \text{etc.}$$

Addatur haec aequatio ad praecedentem, prodibitque aequatio limi

$$S + S' = X.$$

Quare per formulas differentiales habebimus

$$X = 2S + \partial S + \frac{1}{2} \partial \partial S + \frac{1}{6} \partial^3 S + \frac{1}{24} \partial^4 S + \text{etc.},$$

unde neglectis differentialibus erit $S = \frac{1}{2} X$, qui ergo erit primus
seriei quam quaerimus. Statuamus igitur

$$S = \frac{1}{2} X + \alpha \partial X + \beta \partial \partial X + \gamma \partial^3 X + \text{etc.}$$

et facta substitutione fiet

$$\begin{aligned} 2S &= X + 2\alpha \partial X + 2\beta \partial \partial X + 2\gamma \partial^3 X + 2\delta \partial^4 X + \text{etc.} \\ \partial S &= \frac{1}{2} + \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.} \\ \frac{1}{2} \partial \partial S &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta + \text{etc.} \\ \frac{1}{6} \partial^3 S &= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \alpha + \text{etc.} \\ \frac{1}{24} \partial^4 S &= \frac{1}{48} + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc.,

quae expressio tota soli X est aequanda.

15. Singulis igitur columnis verticalibus ad nihilum redactis orientur
entes aequalitates:

$$2\alpha + \frac{1}{2} = 0, \quad 2\beta + \alpha + \frac{1}{4} = 0, \quad 2\gamma + \beta + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{12} = 0,$$

$$2\delta + \gamma + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{48} = 0 \text{ etc.},$$

ae priores saltem litterae has recipiunt determinaciones:

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{48}, \quad \delta = 0 \text{ etc.}$$

16. Quo autem hos valores facilius investigemus, consideremus hanc seriem:

$$V = \frac{1}{2} + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.},$$

scilicet summam V quaeori oporteat. Inde ergo sequentes derivemus series:

$$2V = 1 + 2\alpha z + 2\beta z^2 + 2\gamma z^3 + 2\delta z^4 + 2\epsilon z^5 + \text{etc.},$$

$$Vz = + \frac{1}{2}z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \delta z^5 + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2}Vz^2 = + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{6}Vz^3 = + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}\beta + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{24}Vz^4 = + \frac{1}{48} + \frac{1}{24}\alpha + \text{etc.}$$

etc.

um igitur serierum summa ob aequalitates ante allatas fiet $= 1$, sicque
bimus istam aequationem:

$$V\left(2 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \text{etc.}\right) = 1.$$

Quare cum sit

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \text{etc.},$$

erit manifesto

$$V(1 + e^z) = 1$$

sive

$$V = \frac{1}{1 + e^z},$$

unde fit

$$2V - 1 = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}.$$

17. Ponatur igitur ut ante

$$\frac{e^z - 1}{e^z + 1} = u,$$

ut sit

$$2V = 1 - u,$$

sitque iterum $z = 2t$, ita ut

$$u = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}},$$

et facta evolutione erit

$$u = \frac{t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{60480}t^7 + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{720}t^6 + \text{etc.}}.$$

Unde patet seriei valorem ipsius u exprimentis primum terminum sequentes vero per potestates impares ipsius t progredi.

18. Cum igitur sit

$$u = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1},$$

erit

$$e^{2t} = \frac{1 + u}{1 - u}$$

ideoque

$$2t = l \frac{1 + u}{1 - u},$$

e differentiendo fit

$$\partial t = \frac{\partial u}{1 - uu},$$

ut

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uu - 1 = 0,$$

e est ipsa aequatio pro casu priore inventa. Neque tamen propterea pro
adom series provenit. Quoniam enim hic primus seriei terminus debe
e = t, fingenda est huiusmodi series:

$$u = t - \mathfrak{A}t^3 + \mathfrak{B}t^5 - \mathfrak{C}t^7 + \mathfrak{D}t^9 - \mathfrak{E}t^{11} + \text{etc.}$$

que debet facta substitutione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1 - 3\mathfrak{A}t^2 + 5\mathfrak{B}t^4 - 7\mathfrak{C}t^6 + 9\mathfrak{D}t^8 - 11\mathfrak{E}t^{10} + \text{etc.},$$

$$uu = + 1 - 2\mathfrak{A}t + 2\mathfrak{B}t^3 - 2\mathfrak{C}t^5 + 2\mathfrak{D}t^7 - \text{etc.}$$

$$+ \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \text{etc.}$$

$$+ \mathfrak{B}^2 + \text{etc.}$$

etc.

$$- 1 = - 1$$

ne hinc sequentes oriuntur determinationes:

$$3\mathfrak{A} = 1 \quad \text{ideoque} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{3},$$

$$5\mathfrak{B} = 2\mathfrak{A} \quad \text{ideoque} \quad \mathfrak{B} = \frac{2}{5}\mathfrak{A} = \frac{2}{15},$$

$$7\mathfrak{C} = 2\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^2 \quad \text{hinc} \quad \mathfrak{C} = \frac{2}{7}\mathfrak{B} + \frac{1}{7}\mathfrak{A}^2 = \frac{17}{315},$$

$$9\mathfrak{D} = 2\mathfrak{C} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \text{ergo} \quad \mathfrak{D} = \frac{2}{9}\mathfrak{C} + \frac{2}{9}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{62}{2835}$$

etc.

etc.

19. Cum igitur sit

$$V = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u,$$

si loco t restituamus $\frac{z}{2}$, pro V hanc reperiemus seriem:

$$V = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \frac{1}{16}\mathfrak{A}z^3 - \frac{1}{64}\mathfrak{B}z^5 + \frac{1}{256}\mathfrak{C}z^7 - \frac{1}{1024}\mathfrak{D}z^9 + \text{etc.}$$

Quare cum posuerimus

$$V = \frac{1}{2} + \alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7 + \text{etc.},$$

hinc colligimus valores litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., qui ergo erunt

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{16}\mathfrak{A}, \quad \delta = 0, \quad \epsilon = -\frac{1}{64}\mathfrak{B}, \quad \zeta = 0, \quad \eta = \frac{1}{256}\mathfrak{C}, \quad \text{etc.}$$

consequenter summa quaesita erit

$$S = \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\partial X + \frac{1}{16}\mathfrak{A}\partial^3 X - \frac{1}{64}\mathfrak{B}\partial^5 X + \frac{1}{256}\mathfrak{C}\partial^7 X - \text{etc.}$$

20. Comparemus nunc istos coefficientes cum iis, quos in casu dante pro similibus differentialibus sumus adepti, qui erant $\frac{A}{2}, \frac{B}{8}$ atque egregiam relationem inter utrosque deprehendemus, uti ex hoc videre licet:

∂X	$\frac{1}{4} : \frac{A}{2} = 3 = 2^2 - 1,$
$\partial^3 X$	$\frac{\mathfrak{A}}{16} : \frac{B}{8} = 15 = 2^4 - 1,$
$\partial^5 X$	$\frac{\mathfrak{B}}{64} : \frac{C}{32} = 63 = 2^6 - 1,$
$\partial^7 X$	$\frac{\mathfrak{C}}{256} : \frac{D}{128} = 255 = 2^8 - 1,$
$\partial^9 X$	$\frac{\mathfrak{D}}{1024} : \frac{E}{512} = 1023 = 2^{10} - 1$
etc.	etc.

1. Per eosdem igitur numeros notissimos A, B, C, D etc. etiam hoc summa quacsita sequenti modo commode exprimetur:

$$S = \frac{1}{2} X - (2^2 - 1) \frac{A}{2} \cdot \partial X + (2^4 - 1) \frac{B}{8} \cdot \partial^3 X - (2^6 - 1) \frac{C}{32} \cdot \partial^5 X \\ + (2^8 - 1) \frac{D}{128} \cdot \partial^7 X - (2^{10} - 1) \frac{E}{512} \cdot \partial^9 X + \text{etc.},$$

seriem, quousque lubuerit, continuare licet.

DE SERIEBUS MEMORABILIBUS QUIBUS SINUS ET COSINUS ANGULORUM MULTIPLORUM EXPRIMERE LICET¹⁾

Conventui exhibuit die 13. Martii 1780

Commentatio 747 indiciis ENESTROEMIANI

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 5 (1812), 1815, p. 57—72

1. Series, quas hic sum expositurus, non tam ob usum in multiplicatione angulorum, quam ob eximia calculi artificia, quae me ad eas perduxerunt imprimis autem propter egregiam simplicitatem legis, qua earum termini pergrediuntur, omni attentione dignae videntur. Ad eas autem commodius investigandas utor characteribus, quibus coefficientes potestatum binomialium designare soleo. Ita si x fuerit exponens potestatis, hi characteres sequentes habeant significationes:

$$\left(\frac{x}{1}\right) = x, \quad \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}, \quad \left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad \text{etc.}$$

sicque in genere erit

$$\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \cdots (x-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}.$$

2. Proposito nunc angulo quocunque φ pro eius multiplo quocunque tales series secundum memoratos characteres procedentes indagabo, quae

¹⁾ Vide notam ad p. 542 vol. I₁₄ adiectam et Commentationes ibi laudatas 686, 703, praesentis voluminis. C. B.

sinum quam sinum huius anguli multipli exprimant. Ac primo quidem sinu istam fingo seriem:

$$\cos. x\varphi = 1 + \left(\frac{x}{1}\right)A + \left(\frac{x}{2}\right)B + \left(\frac{x}{3}\right)C + \left(\frac{x}{4}\right)D + \text{etc.},$$

hae semper abrumpitur, quoties x denotat numerum integrum positivum, alioquin in infinitum excurrit. Ad has autem litteras A , B , C , D , etc. investigandas loco x successive assumo valores 1, 2, 3, 4 etc., eisdem valores $\cos. \varphi$, $\cos. 2\varphi$, $\cos. 3\varphi$, $\cos. 4\varphi$ etc. tanquam cognitos specto.

3. Facta igitur hac evolutione sequentes valores pro litteris A , B , C , D perientur:

Si	erit.
$x = 1$	$\cos. \varphi = 1 + A,$ ergo $A = \cos. \varphi - 1,$
$x = 2$	$\cos. 2\varphi = 1 + 2A + B,$ ergo $B = \cos. 2\varphi - 2 \cos. \varphi + 1,$
$x = 3$	$\cos. 3\varphi = 1 + 3A + 3B + C,$ ergo $C = \cos. 3\varphi - 3 \cos. 2\varphi + 3 \cos. \varphi - 1,$
$x = 4$	$\cos. 4\varphi = 1 + 4A + 6B + 4C + D,$ ergo $D = \cos. 4\varphi - 4 \cos. 3\varphi + 6 \cos. 2\varphi - 4 \cos. \varphi + 1,$
$x = 5$	$\cos. 5\varphi = 1 + 5A + 10B + 10C + 5D + E,$ ergo $E = \cos. 5\varphi - 5 \cos. 4\varphi + 10 \cos. 3\varphi - 10 \cos. 2\varphi$ $+ 5 \cos. \varphi - 1$
etc.	etc.

4. Hinc ergo in genere, pro casu $x = n$, si littera coefficienti fuerit N , sequitur fore

$$N = \cos. nq - \left(\frac{n}{1}\right) \cos. (n-1)q + \left(\frac{n}{2}\right) \cos. (n-2)q - \left(\frac{n}{3}\right) \cos. (n-3)q + \dots$$

Nunc igitur praeipuum negotium huc redit, ut istius expressionis valor ad formulam finitam reducatur, id quod fit, si illius series quae est N , elicuerimus. Quanquam autem plures iam huiusmodi cosinus procedentes sunt summatae, tamen methodi, qui ad eas investigandas sunt usi, vix ac ne vix quidem ad hunc casum modari posse videntur. Singularem igitur methodum hic proponere ad hunc scopum perduxit.

5. Considero scilicet has binas formulas imaginarias:

$$p = \cos. q + \sqrt{-1} \sin. q \quad \text{et} \quad q = \cos. q - \sqrt{-1} \sin. q$$

ex quibus constat fore

$$p^n + q^n = 2 \cos. nq$$

ideoque

$$\cos. nq = \frac{1}{2} (p^n + q^n).$$

Similique modo erit

$$\cos. (n-1)q = \frac{1}{2} (p^{n-1} + q^{n-1})$$

et ita porro, quibus valoribus substitutis et potestatibus litterarum seorsim positae facta multiplicatione per 2 habebimus

$$2N = + p^n - \left(\frac{n}{1}\right) p^{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right) p^{n-2} - \left(\frac{n}{3}\right) p^{n-3} + \text{etc.}$$

$$+ q^n - \left(\frac{n}{1}\right) q^{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right) q^{n-2} - \left(\frac{n}{3}\right) q^{n-3} + \text{etc.}$$

$$2N = (p - 1)^n + (q - 1)^n,$$

formulas ergo ulterius prosequi oportet.

6. Cum igitur sit

$$p = \cos. q + \sqrt{-1} \sin. q,$$

$$p - 1 = \cos. q - 1 + \sqrt{-1} \sin. q.$$

statuamus $q = 2\omega$, et cum sit

$$\cos. q = 1 - 2 \sin. \omega^2 \quad \text{et} \quad \sin. q = 2 \sin. \omega \cos. \omega,$$

bimus

$$p - 1 = 2 \sin. \omega (\sqrt{-1} \cos. \omega - \sin. \omega),$$

expressio reducitur ad hanc:

$$p - 1 = 2 \sqrt{-1} \sin. \omega (\cos. \omega + \sqrt{-1} \sin. \omega).$$

li autem modo reperietur

$$q - 1 = -2 \sqrt{-1} \sin. \omega (\cos. \omega - \sqrt{-1} \sin. \omega).$$

his igitur formulis conficietur

$$(p - 1)^n = 2^n (\sqrt{-1})^n \sin. \omega^n (\cos. n\omega + \sqrt{-1} \sin. n\omega),$$

$$(q - 1)^n = 2^n (-\sqrt{-1})^n \sin. \omega^n (\cos. n\omega - \sqrt{-1} \sin. n\omega),$$

um ergo formularum summa praebebat valorem ipsius $2N$, quem quaerimus.

7. Potestates autem imaginariorum $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ modo fiunt modo -1 , modo imaginariae $\pm \sqrt{-1}$, prout exponens n fuerit numeri formae $4i$ vel $4i + 1$ vel $4i + 2$ vel $4i + 3$, quandoquidem constat esse

$$(\sqrt{-1})^{4i} = +1; \quad (-\sqrt{-1})^{4i} = +1,$$

$$(\sqrt{-1})^{4i+1} = \sqrt{-1}; \quad (-\sqrt{-1})^{4i+1} = -\sqrt{-1},$$

$$(\sqrt{-1})^{4i+2} = -1; \quad (-\sqrt{-1})^{4i+2} = -1,$$

$$(\sqrt{-1})^{4i+3} = -\sqrt{-1}; \quad (-\sqrt{-1})^{4i+3} = +\sqrt{-1}.$$

8. Hac observatione praemissa tribuamus nunc successive exponens valores 1, 2, 3, 4 etc., quo pacto N denotabit successive litteras A, B, C, \dots quarum ergo valores sequenti modo per angulum $\omega = \frac{1}{2}\varphi$ expressos representamus. Sit igitur primo $n = 1$, erit

$$\begin{aligned} 2A &= 2\sqrt{-1} \sin.\omega (\cos.\omega + \sqrt{-1} \sin.\omega) \\ &\quad - 2\sqrt{-1} \sin.\omega (\cos.\omega - \sqrt{-1} \sin.\omega), \end{aligned}$$

qui ergo valor reducitur ad hanc formam:

$$2A = -4 \sin.\omega \sin.\omega$$

ideoque

$$A = -2 \sin.\omega \sin.\omega.$$

9. Sumto autem $n = 2$ fiet

$$\begin{aligned} 2B &= -4 \sin.\omega^2 (\cos.2\omega + \sqrt{-1} \sin.2\omega) \\ &\quad - 4 \sin.\omega^2 (\cos.2\omega - \sqrt{-1} \sin.2\omega), \end{aligned}$$

unde colligitur

$$B = -4 \sin.\omega^2 \cos.2\omega.$$

10. Sit $n = 3$, critique

$$\begin{aligned} 2C &= -8\sqrt{-1} \sin. \omega^3 (\cos. 3\omega + \sqrt{-1} \sin. 3\omega) \\ &\quad + 8\sqrt{-1} \sin. \omega^3 (\cos. 3\omega - \sqrt{-1} \sin. 3\omega), \end{aligned}$$

ex quo fit

$$C = 8 \sin. \omega^3 \sin. 3\omega.$$

11. Sumatur $n = 4$, atque nanciscemur

$$\begin{aligned} 2D &= 16 \sin. \omega^4 (\cos. 4\omega + \sqrt{-1} \sin. 4\omega) \\ &\quad + 16 \sin. \omega^4 (\cos. 4\omega - \sqrt{-1} \sin. 4\omega), \end{aligned}$$

hincque oritur

$$D = 16 \sin. \omega^4 \cos. 4\omega.$$

12. Sumto porro $n = 5$ fit

$$\begin{aligned} 2E &= 32\sqrt{-1} \sin. \omega^5 (\cos. 5\omega + \sqrt{-1} \sin. 5\omega) \\ &\quad - 32\sqrt{-1} \sin. \omega^5 (\cos. 5\omega - \sqrt{-1} \sin. 5\omega), \end{aligned}$$

ergo colligendo prodit

$$E = -32 \sin. \omega^5 \sin. 5\omega.$$

13. Pro casu $n = 6$ invenitur

$$\begin{aligned} 2F &= -64 \sin. \omega^6 (\cos. 6\omega + \sqrt{-1} \sin. 6\omega) \\ &\quad - 64 \sin. \omega^6 (\cos. 6\omega - \sqrt{-1} \sin. 6\omega), \end{aligned}$$

sive

$$F = -64 \sin. \omega^6 \cos. 6\omega.$$

14. Statuatur porro $n = 7$, eritque

$$2G = -128 \sqrt{-1} \sin. \omega^7 (\cos. 7\omega + \sqrt{-1} \sin. 7\omega) \\ + 128 \sqrt{-1} \sin. \omega^7 (\cos. 7\omega - \sqrt{-1} \sin. 7\omega)$$

ideoque

$$G = +128 \sin. \omega^7 \sin. 7\omega.$$

15. Denique posito $n = 8$ prodit

$$2H = +256 \sin. \omega^8 (\cos. 8\omega + \sqrt{-1} \sin. 8\omega) \\ + 256 \sin. \omega^8 (\cos. 8\omega - \sqrt{-1} \sin. 8\omega),$$

hincque

$$H = +256 \sin. \omega^8 \cos. 8\omega.$$

16. Istos igitur valores per periodos quadripartitas progredier
quentibus duabus columnis iunctim repraesentamus:

$$A = -2 \sin. \omega \sin. \omega, \quad B = -2^2 \sin. \omega^2 \cos. 2\omega, \\ C = +2^3 \sin. \omega^3 \sin. 3\omega, \quad D = +2^4 \sin. \omega^4 \cos. 4\omega, \\ E = -2^5 \sin. \omega^5 \sin. 5\omega, \quad F = -2^6 \sin. \omega^6 \cos. 6\omega, \\ G = +2^7 \sin. \omega^7 \sin. 7\omega, \quad H = +2^8 \sin. \omega^8 \cos. 8\omega, \\ I = -2^9 \sin. \omega^9 \sin. 9\omega, \quad K = -2^{10} \sin. \omega^{10} \cos. 10\omega \\ \text{etc.};$$

consequenter valor formulae propositae, scilicet $\cos. x\varphi$ sive $\cos. 2x\omega$,
quentem seriem satis concinnam exprimitur:

$$\cos. 2x\omega = \begin{cases} 1 - 2\left(\frac{x}{1}\right) \sin. \omega \sin. \omega - 4\left(\frac{x}{2}\right) \sin. \omega^2 \cos. 2\omega \\ + 8\left(\frac{x}{3}\right) \sin. \omega^3 \sin. 3\omega + 16\left(\frac{x}{4}\right) \sin. \omega^4 \cos. 4\omega \\ - 32\left(\frac{x}{5}\right) \sin. \omega^5 \sin. 5\omega - 64\left(\frac{x}{6}\right) \sin. \omega^6 \cos. 6\omega \\ + 128\left(\frac{x}{7}\right) \sin. \omega^7 \sin. 7\omega + 256\left(\frac{x}{8}\right) \sin. \omega^8 \cos. 8\omega \\ \text{etc.} \end{cases}$$

7. Antequam hanc formulam maxime generalem ad casus particulares reducamus, observationem prorsus singularem eamque maximi momenti attulisse operae pretium est inde petitam, quod per evolutionem hanc sit

$$\cos. x\varphi = 1 - \frac{1}{2}x^2\varphi^2 + \frac{1}{24}x^4\varphi^4 - \frac{1}{720}x^6\varphi^6 + \text{etc.}$$

tantum potestates pares ipsius x occurrunt; quam ob rem necesse est, ut extra serie inventa facta evolutione characterum $\left(\frac{x}{n}\right)$ omnes termini potestates imparibus ipsius x affecti seorsim se mutuo destruant; quare etiam termini inde resultantes sola littera x affecti iunctimque sumti nihilo eri debobunt, unde istos terminos ex singulis characteribus oriundos hic colligamus:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{2}\right) \text{ dat } + x, \quad \left(\frac{x}{2}\right) \text{ dat } - \frac{1}{2}x, \quad \left(\frac{x}{3}\right) \text{ dat } + \frac{1}{3}x, \quad \left(\frac{x}{4}\right) \text{ dat } - \frac{1}{4}x, \\ & \left(\frac{x}{5}\right) \text{ dat } + \frac{1}{5}x, \quad \left(\frac{x}{6}\right) \text{ dat } - \frac{1}{6}x, \quad \left(\frac{x}{7}\right) \text{ dat } + \frac{1}{7}x, \quad \left(\frac{x}{8}\right) \text{ dat } - \frac{1}{8}x, \\ & \left(\frac{x}{9}\right) \text{ dat } + \frac{1}{9}x, \quad \left(\frac{x}{10}\right) \text{ dat } - \frac{1}{10}x, \quad \left(\frac{x}{11}\right) \text{ dat } + \frac{1}{11}x, \quad \left(\frac{x}{12}\right) \text{ dat } - \frac{1}{12}x \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

8. Colligamus igitur omnes istos terminos ac dividendo per x pervenientem sequentem seriem maxime memorabilem:

$$\begin{aligned} 0 = & -2 \sin. \omega \sin. \omega + \frac{1}{2} \cdot 2^2 \sin. \omega^2 \cos. 2\omega + \frac{1}{3} \cdot 2^3 \sin. \omega^3 \sin. 3\omega \\ & + \frac{1}{4} \cdot 2^4 \sin. \omega^4 \cos. 4\omega - \frac{1}{5} \cdot 2^5 \sin. \omega^5 \sin. 5\omega + \frac{1}{6} \cdot 2^6 \sin. \omega^6 \cos. 6\omega + \text{etc.}, \end{aligned}$$

duas series inter se aequales deducimus, quae sunt

$$\begin{aligned} & 2 \sin. \omega \sin. \omega - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \sin. \omega^3 \sin. 3\omega + \frac{1}{5} \cdot 2^5 \sin. \omega^5 \sin. 5\omega - \text{etc.} \\ & \frac{1}{2} \cdot 2^2 \sin. \omega^2 \cos. 2\omega - \frac{1}{4} \cdot 2^4 \sin. \omega^4 \cos. 4\omega + \frac{1}{6} \cdot 2^6 \sin. \omega^6 \cos. 6\omega - \text{etc.} \end{aligned}$$

ergo pulcherrimum theorema condi potest:

THEOREMA

Denotante ω angulum quemcunque duae sequentes series

$$s = \frac{2}{1} \sin. \omega \sin. \omega - \frac{2^3}{3} \sin. \omega^3 \sin. 3\omega + \frac{2^5}{5} \sin. \omega^5 \sin. 5\omega - \text{etc.}$$

$$t = \frac{2^2}{2} \sin. \omega^2 \cos. 2\omega - \frac{2^4}{4} \sin. \omega^4 \cos. 4\omega + \frac{2^6}{6} \sin. \omega^6 \cos. 6\omega - \text{etc.}$$

semper erunt inter se aequales, sive erit $s = t$.

DEMONSTRATIO

19. Hic ubique loco $2 \sin. \omega$ scribamus litteram b , ut sit

$$s = \frac{b \sin. \omega}{1} - \frac{b^3 \sin. 3\omega}{3} + \frac{b^5 \sin. 5\omega}{5} - \frac{b^7 \sin. 7\omega}{7} + \text{etc.},$$

$$t = \frac{b^2 \cos. 2\omega}{2} - \frac{b^4 \cos. 4\omega}{4} + \frac{b^6 \cos. 6\omega}{6} - \frac{b^8 \cos. 8\omega}{8} + \text{etc.},$$

quarum serierum summas investigemus nullo habito respectu ad re-
quae inter litteras b et ω intercedit, quam ob rem nihil impedit, et
littera b tanquam constans spectetur; utriusque autem summa inven-
restituemus valorem assumptum $2 \sin. \omega$, atque videbimus hoc casu
futurum esse $t = s$.

20. Incipiamus igitur a serie priore, de qua observemus sum-
 $\omega = 0$ fore etiam $s = 0$, atque differentiata hac serie reperiemus for-

$$\frac{\partial s}{\partial \omega} = b \cos. \omega - b^3 \cos. 3\omega + b^5 \cos. 5\omega - b^7 \cos. 7\omega + \text{etc.},$$

quae multiplicetur per $1 + 2bb \cos. 2\omega + b^4$; atque ob

$$2 \cos. 2\omega \cos. n\omega = \cos. (n+2)\omega + \cos. (n-2)\omega$$

obtinebimus sequentem aequationem:

$$\frac{\partial s}{\partial \omega}(1 + 2bb \cos. 2\omega + b^4)$$

$$= b \cos. \omega - b^3 \cos. 3\omega + b^5 \cos. 5\omega - b^7 \cos. 7\omega + b^9 \cos. 9\omega - \text{etc.}$$

$$+ b^3 \cos. 3\omega - b^5 \cos. 5\omega + b^7 \cos. 7\omega - b^9 \cos. 9\omega + \text{etc.}$$

$$+ b^5 \cos. \omega - b^6 \cos. \omega + b^7 \cos. 3\omega - b^9 \cos. 5\omega + \text{etc.}$$

$$+ b^5 \cos. \omega - b^7 \cos. 3\omega + b^9 \cos. 5\omega - \text{etc.},$$

us terminis collectis nanciscemur

$$\frac{\partial s}{\partial \omega}(1 + 2bb \cos. 2\omega + b^4) = b \cos. \omega + b^3 \cos. \omega = b(1 + bb) \cos. \omega$$

erit

$$\partial s = \frac{b(1 + bb) \partial \omega \cos. \omega}{1 + 2bb \cos. 2\omega + b^4}.$$

21. Simili modo tractemus alteram seriem, de qua notasse iuvabit sumto
0 fore

$$t = \frac{1}{2}l(1 + bb),$$

sit

$$t = \frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^6}{6} - \frac{b^8}{8} + \text{etc.}$$

a iam differentiatione prodibit

$$\frac{\partial t}{\partial \omega} = -bb \sin. 2\omega + b^4 \sin. 4\omega - b^6 \sin. 6\omega + \text{etc.}$$

iam iterum utrinque multiplicetur per $1 + 2bb \cos. 2\omega + b^4$ et calculus ita
netur:

$$1 \cdot \frac{\partial t}{\partial \omega} = -bb \sin. 2\omega + b^4 \sin. 4\omega - b^6 \sin. 6\omega + b^8 \sin. 8\omega - \text{etc.},$$

$$2b^2 \cos. 2\omega \cdot \frac{\partial t}{\partial \omega} = -b^4 \sin. 4\omega + b^6 \sin. 6\omega - b^8 \sin. 8\omega + \text{etc.}$$

$$+ b^6 \sin. 2\omega - b^8 \sin. 4\omega + \text{etc.}$$

$$+ b^4 \cdot \frac{\partial t}{\partial \omega} = -b^6 \sin. 2\omega + b^8 \sin. 4\omega - \text{etc.},$$

unde collectis membris nascitur haec aequatio:

$$\frac{\partial t}{\partial \omega} (1 + 2bb \cos. 2\omega + b^4) = -bb \sin. 2\omega;$$

consequenter erit

$$\partial t = - \frac{bb \partial \omega \sin. 2\omega}{1 + 2bb \cos. 2\omega + b^4}.$$

22. Inventis his duabus formulis differentialibus utriusque investigemus, ac pro priore quidem ob

$$\partial \omega \cos. \omega = \partial \cdot \sin. \omega$$

habebimus

$$\partial s = \frac{b(1 + bb) \partial \cdot \sin. \omega}{1 + 2bb \cos. 2\omega + b^4},$$

quae expressio ob

$$\cos. 2\omega = 1 - 2 \sin. \omega^2$$

transformatur in hanc

$$\partial s = \frac{b(1 + bb) \partial \cdot \sin. \omega}{(1 + bb)^2 - 4bb \sin. \omega^2}.$$

Quia vero constat esse

$$\int \frac{\partial z}{ff - ggzz} = \frac{1}{2fg} \int \frac{f + gz}{f - gz},$$

nostro autem casu sit $f = 1 + bb$ et $g = 2b$ et $z = \sin. \omega$, integrale:

$$s = \frac{1}{4} \int \frac{1 + bb + 2b \sin. \omega}{1 + bb - 2b \sin. \omega},$$

quae formula casu $\omega = 0$ evanescit ideoque constantis additione

23. Pro altera formula ob

$$- \partial \omega \sin. 2\omega = \frac{1}{2} \partial \cdot \cos. 2\omega$$

ubi numerator aequatur quartae parti differentialis denominatoris, unde
grale erit

$$t = \frac{1}{4} l(1 + 2bb \cos. 2\omega + b^4).$$

Necesse autem est, ut posito $\omega = 0$ fiat

$$t = \frac{1}{2} l(1 + bb),$$

atque commodè hic evenit, ut isto casu idem valor prodeat, sicque adie
constantis non est opus. Notasse autem hic iuvabit esse etiam

$$t = \frac{1}{4} l(1 + bb + 2b \sin. \omega) + \frac{1}{4} l(1 + bb - 2b \sin. \omega).$$

24. His iam integralibus inventis ob

$$s = \frac{1}{4} l(1 + bb + 2b \sin. \omega) - \frac{1}{4} l(1 + bb - 2b \sin. \omega)$$

erit eorum differentia

$$t - s = \frac{1}{2} l(1 + bb - 2b \sin. \omega).$$

At vero pro casu nostri theorematis est $b = 2 \sin. \omega$, quo valore subs
prodit $t - s = \frac{1}{2} l1 = 0$, quae est demonstratio nostri theorematis.

EXEMPLUM 1

25. Contemplemur nunc etiam nonnullos casus particularem, si sumeremus $\omega = 180^\circ$, omnes plane termini in $\cos. x\omega$ quidem, si sumeremus $\omega = 180^\circ$, omnes plane termini in $\cos. x\omega$ Quamobrem incipiamus a casu $\omega = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, ubi ergo erit

$$\cos. 2\omega = -1, \quad \cos. 4\omega = +1, \quad \cos. 6\omega = -1, \quad \cos. 8\omega = +1,$$

$$\sin. \omega = +1, \quad \sin. 3\omega = -1, \quad \sin. 5\omega = +1, \quad \sin. 7\omega = -1,$$

quamobrem series pro $\cos. x\pi$ inventa erit

$$\cos. x\pi = 1 - 2\left(\frac{x}{1}\right) + 4\left(\frac{x}{2}\right) - 8\left(\frac{x}{3}\right) + 16\left(\frac{x}{4}\right) - 32\left(\frac{x}{5}\right) + \dots$$

quae series manifesto nascitur ex evolutione potestatis $(1 - 2)^x$ valores sunt alternatim $+1$ et -1 , id quod egregie convenit cum $\cos. x\pi$, siquidem ipsi x tribuantur numeri integri.

26. Hoc autem casu binae illae series, quas inter se ad invicem inveniunt, erunt

$$2 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{1}{7} \cdot 2^7 + \text{etc.} = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{6} \cdot 2^6 - \text{etc.}$$

Cum autem haec series maxime sit divergens, nullum consilium cum veritate expectare licet, quod quidem maxime paradoxonum novimus utique dari eiusmodi series divergentes omnes terminos habentes, quarum summa tamen non solum sit nulla sed adeo veritas in superiore theoremate iam solidissime est demonstrata.

EXEMPLUM 2

27. Sumatur nunc $\omega = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, erit $2 \sin. \omega = b = \sqrt{3}$, Tum vero erit

$$\sin. 3\omega = 0, \quad \sin. 5\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin. 7\omega = +\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin. 9\omega = 0,$$

$$\cos. 2\omega = -\frac{1}{2}, \quad \cos. 4\omega = -\frac{1}{2}, \quad \cos. 6\omega = 1, \quad \cos. 8\omega = -\frac{1}{2},$$

ergo sequentem nanciscimur seriem¹⁾:

$$\cos. \frac{2\pi x}{3} = 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{1}\right) + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{9}{2} \left(\frac{x}{4}\right) + \frac{27}{2} \left(\frac{x}{5}\right) - 27 \left(\frac{x}{6}\right) \\ + \frac{81}{2} \left(\frac{x}{7}\right) - \frac{81}{2} \left(\frac{x}{8}\right) + \text{etc.}$$

autem binæ series pro s et t inventæ hoc casu erunt

$$s = \frac{3}{2} - \frac{27}{2 \cdot 5} + \frac{81}{2 \cdot 7} + \frac{729}{2 \cdot 11} + \frac{2187}{2 \cdot 13} - \text{etc.}$$

$$2s = 3^1 - \frac{3^3}{5} + \frac{3^4}{7} + \frac{3^6}{11} + \frac{3^7}{13} - \frac{3^9}{17} - \frac{3^{10}}{19} + \text{etc.},$$

porro

$$t = -\frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{9}{2 \cdot 4} + \frac{27}{1 \cdot 6} + \frac{81}{2 \cdot 8} - \frac{243}{2 \cdot 10} - \frac{729}{1 \cdot 12} - \text{etc.}$$

$$2t = -\frac{3^1}{2} + \frac{3^2}{4} + \frac{3^3}{3} + \frac{3^4}{8} - \frac{3^5}{10} - \frac{3^6}{6} - \text{etc.},$$

ergo duæ series certe sunt æquales, etiamsi hoc absurdum videri queat, rei causa in eo est quaerenda, quod hae series sunt divergentes.

EXEMPLUM 3

28. Sumatur $\omega = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$, eritque $\sin. \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ideoque $b = \sqrt{2}$. Porro notetur esse

$$\sin. 3\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin. 5\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin. 7\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin. 9\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{etc.},$$

$$\cos. 2\omega = 0, \quad \cos. 4\omega = -1, \quad \cos. 6\omega = 0, \quad \cos. 8\omega = +1 \quad \text{etc.},$$

1) Editio princeps:

$$\cos. \frac{2\pi x}{3} = 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{1}\right) + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{9}{2} \left(\frac{x}{4}\right) + \frac{27}{2} \left(\frac{x}{5}\right) - \frac{27}{2} \left(\frac{x}{6}\right) + \frac{81}{2} \left(\frac{x}{7}\right) - \frac{81}{2} \left(\frac{x}{8}\right) + \text{etc.} \quad \text{G. B.}$$

29*

unde series nostra principalis erit

$$\cos. \frac{\pi x}{2} = 1 - \binom{x}{1} + 2 \binom{x}{3} - 4 \binom{x}{4} + 4 \binom{x}{5} - 8 \binom{x}{7} + \dots$$

Haec autem series adhuc est divergens. Illae autem duae aequales esse ostendimus, ita se habebunt:

$$s = 1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{8}{7} + \frac{16}{9} - \frac{32}{11} - \frac{64}{13} + \dots$$

$$t = \frac{4}{4} - \frac{16}{8} + \frac{64}{12} - \frac{256}{16} + \frac{1024}{20} - \frac{4096}{24} + \frac{16384}{28} - \dots$$

sive

$$s = 1 - \frac{2}{3} - \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{7} + \frac{2^4}{9} - \frac{2^5}{11} - \frac{2^6}{13} + \text{etc.}$$

$$t = \frac{4}{4} - \frac{4^2}{8} + \frac{4^3}{12} - \frac{4^4}{16} + \frac{4^5}{20} - \frac{4^6}{24} + \frac{4^7}{28} - \text{etc.}$$

ubi nihil absoni occurrit.

EXEMPLUM 4

29. Sit denique $\omega = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, unde ob $\sin. \omega = \frac{1}{2}$ oritur casus ad series convergentes perducet. Est vero

$$\sin. 3\omega = 1, \quad \sin. 5\omega = \frac{1}{2}, \quad \sin. 7\omega = -\frac{1}{2}, \quad \sin. 9\omega = -1,$$

$$\cos. 2\omega = \frac{1}{2}, \quad \cos. 4\omega = -\frac{1}{2}, \quad \cos. 6\omega = -1, \quad \cos. 8\omega = -\frac{1}{2},$$

etc.

Hinc ergo nostra series erit

$$\begin{aligned} \cos. \frac{\pi x}{3} = 1 - \frac{1}{2} \binom{x}{1} - \frac{1}{2} \binom{x}{2} + \binom{x}{3} - \frac{1}{2} \binom{x}{4} - \frac{1}{2} \binom{x}{5} + \\ - \frac{1}{2} \binom{x}{8} + \binom{x}{9} - \frac{1}{2} \binom{x}{10} - \frac{1}{2} \binom{x}{11} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

ae expressio commode in ternas sequentes series decomponitur:

$$\cos. \frac{\pi x}{3} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \left(1 + \left(\frac{x}{3} \right) + \left(\frac{x}{6} \right) + \left(\frac{x}{9} \right) + \left(\frac{x}{12} \right) + \text{etc.} \right) \\ - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{1} \right) + \left(\frac{x}{4} \right) + \left(\frac{x}{7} \right) + \left(\frac{x}{10} \right) + \left(\frac{x}{13} \right) + \text{etc.} \right) \\ - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{2} \right) + \left(\frac{x}{5} \right) + \left(\frac{x}{8} \right) + \left(\frac{x}{11} \right) + \left(\frac{x}{14} \right) + \text{etc.} \right) \end{array} \right\}$$

nam autem series s et t hoc casu erunt

$$s = \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{1}{2 \cdot 13} - \text{etc.}$$

$$t = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2 \cdot 8} + \frac{1}{2 \cdot 10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{2 \cdot 14} + \text{etc.}$$

ergo erit

$$2(s - t) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{2}{12} + \text{etc.}$$

aque seriem, cuius summa est $= 0$, hoc modo in tres series resolvere licet:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \text{etc.} \\ - 1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \text{etc.} \right) \\ - 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{1}{15} - \text{etc.} \right) \end{array} \right\}$$

30. Eodem plane modo, quo supra seriem pro $\cos. 2x\omega$ investigavimus, in series pro sinu eiusdem anguli multipli eruitur sequenti modo. Fingat ut supra, haec series:

$$\sin. x\varphi = \left(\frac{x}{1} \right) A + \left(\frac{x}{2} \right) B + \left(\frac{x}{3} \right) C + \text{etc.},$$

quae semper abrumpitur, quoties x denotat numerum integrum p
 Evolvendo autem, ut iam supra fecimus, litterae A, B, C etc. ita re
 expressae, ut facile pateat characteri $\left(\frac{x}{n}\right)$ respondere seriem

$$N = \sin. n\varphi - \left(\frac{n}{1}\right) \sin. (n-1)\varphi + \left(\frac{n}{2}\right) \sin. (n-2)\varphi - \text{etc.}$$

postremo membro existente $\pm \sin. 0\varphi$.

31. Cum iam sit

$$\sin. \lambda \varphi = \frac{p^{\lambda} - q^{\lambda}}{2V - 1},$$

erit

$$2NV - 1 = \left\{ \begin{array}{l} + p^n - \left(\frac{n}{1}\right)p^{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right)p^{n-2} - \text{etc.} = (p-1)^n \\ - q^n + \left(\frac{n}{1}\right)q^{n-1} - \left(\frac{n}{2}\right)q^{n-2} + \text{etc.} = -(q-1)^n \end{array} \right\}$$

At vero ex superioribus manifestum est fore

$$p-1 = 2 \sin. \omega V - 1 (\cos. \omega + V - 1 \sin. \omega),$$

$$q-1 = -2 \sin. \omega V - 1 (\cos. \omega - V - 1 \sin. \omega)$$

ideoque

$$\begin{aligned} 2NV - 1 &= (2 \sin. \omega V - 1)^n (\cos. n\omega + V - 1 \sin. n\omega) \\ &\quad - (-2 \sin. \omega V - 1)^n (\cos. n\omega - V - 1 \sin. n\omega), \end{aligned}$$

ubi notandum pro quatuor formis, quas littera n habere potest, fore.

$$\text{Si } n = 4i, \quad N = (2 \sin. \omega)^n \sin. n\omega,$$

$$\dots n = 4i + 1, \quad N = (2 \sin. \omega)^n \cos. n\omega,$$

$$\dots n = 4i + 2, \quad N = -(2 \sin. \omega)^n \sin. n\omega,$$

$$\dots n = 4i + 3, \quad N = -(2 \sin. \omega)^n \cos. n\omega.$$

32. Quodsi igitur successive litterae n tribuantur valores 1, 2, 3, 4 etc., erit

$$\begin{aligned} A &= + 2 \sin. \omega \cos. \omega, & B &= - 2^2 \sin. \omega^2 \sin. 2\omega, \\ C &= - 2^3 \sin. \omega^3 \cos. 3\omega, & D &= + 2^4 \sin. \omega^4 \sin. 4\omega, \\ E &= + 2^5 \sin. \omega^5 \cos. 5\omega, & E' &= - 2^6 \sin. \omega^6 \sin. 6\omega, \\ G &= - 2^7 \sin. \omega^7 \cos. 7\omega, & H &= + 2^8 \sin. \omega^8 \sin. 8\omega \\ &&& \text{etc.;} \end{aligned}$$

sequenter series quacsita pro sinu restituto loco φ valore 2ω ita se habebit:

$$\sin. 2x\omega = \left\{ \begin{aligned} &+ 2 \binom{x}{1} \sin. \omega \cos. \omega - 4 \binom{x}{2} \sin. \omega^2 \sin. 2\omega \\ &- 8 \binom{x}{3} \sin. \omega^3 \cos. 3\omega + 16 \binom{x}{4} \sin. \omega^4 \sin. 4\omega \\ &+ 32 \binom{x}{5} \sin. \omega^5 \cos. 5\omega - 64 \binom{x}{6} \sin. \omega^6 \sin. 6\omega \\ &- 128 \binom{x}{7} \sin. \omega^7 \cos. 7\omega + 256 \binom{x}{8} \sin. \omega^8 \sin. 8\omega \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned} \right\}$$

COMMENTATIO IN FRACTIONEM CONTINUAM QUA ILLUSTRIS LA GRANGE POTESTATES BINOMIALES EXPRESSIT¹⁾

Conventui exhibuit die 20. Martii 1780

Commentatio 750 indicis ENESTROEMIANI

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg 6 (1813/14), 181

1. Iste vir illustris hanc potestatem binomiale^m $(1+x)^n$ in
singulari ex eius differentiali logarithmico in hanc fractionem
vertit:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1 + \frac{(1-n)x}{2 + \frac{(1+n)x}{3 + \frac{(2-n)x}{2 + \frac{(2+n)x}{5 + \frac{(3-n)x}{2 + \frac{(3+n)x}{7 + \text{etc.}}}}}}}}$$

quae expressio hac insigni proprietate gaudet, ut, quoties exp
numerus integer, sive positivus sive negativus, abrumpatur
finitam redigatur.

1) Vido LAGRANGE, J.-L., *Sur l'usage des fractions continues dans le calcul différentiel*
(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*)
Oeuvres de LAGRANGE, Tomo quatrième, Paris 1869, p. 301—332.

2. Quoniam haec fractio continua non lege uniformi, sed interrupta, proceditur, eam ad legem uniformem revocemus, id quod commodissime fiet, in sequenti modo per partes representemus:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{A},$$

$$A = 1 + \frac{(1-n)x}{2 + \frac{(1+n)x}{B}},$$

$$B = 3 + \frac{(2-n)x}{2 + \frac{(2+n)x}{C}},$$

$$C = 5 + \frac{(3-n)x}{2 + \frac{(3+n)x}{D}},$$

$$D = 7 + \frac{(4-n)x}{2 + \frac{(4+n)x}{E}},$$

etc.

Hinc igitur per reductionem habebimus

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{(1-n)Bx}{2B + (1+n)x} = 1 + \frac{(1-n)x}{2} - \frac{(1-nn)xx:2}{2B + (1+n)x} \\ &= 1 + \frac{(1-n)x}{2} + \frac{(nn-1)xx:4}{B + \left(\frac{1+n}{2}\right)x} \end{aligned}$$

simili modo erit

$$\begin{aligned} B &= 3 + \frac{(2-n)Cx}{2C + (2+n)x} = 3 + \frac{(2-n)x}{2} - \frac{(4-nn)xx:2}{2C + (2+n)x} \\ &= 3 + \frac{(2-n)x}{2} + \frac{(nn-4)xx:4}{C + \left(\frac{2+n}{2}\right)x} \end{aligned}$$

odem modo habebimus

$$\begin{aligned} C &= 5 + \frac{(3-n)Dx}{2D + (3+n)x} = 5 + \frac{(3-n)x}{2} - \frac{(9-nn)xx:2}{2D + (3+n)x} \\ &= 5 + \frac{(3-n)x}{2} + \frac{(nn-9)xx:4}{D + \left(\frac{3+n}{2}\right)x} \end{aligned}$$

ita porro.

3. Quodsi iam hos valores ordine loco A, B, C etc. substituamus, continuo continua sequentem inducet formam:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1 + \frac{(1-n)x}{2}} + \frac{(nn-1)xx:4}{3(1 + \frac{1}{2}x) + \frac{(nn-4)xx:4}{5(1 + \frac{1}{2}x) + \frac{(nn-9)xx:4}{7(1 + \frac{1}{2}x) + \dots}}}$$

4. Quo hinc fractiones partiales abigamus, statuamus $x = 2y$, ciscamur hanc expressionem:

$$(1+2y)^n = 1 + \frac{2ny}{1 + (1-n)y} + \frac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \frac{(nn-4)yy}{5(1+y) + \frac{(nn-9)yy}{7(1+y) + \dots}}}$$

quoae forma facile transmutatur in hanc:

$$\frac{2ny}{(1+2y)^n - 1} = 1 + (1-n)y + \frac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \frac{(nn-4)yy}{5(1+y) + \dots}}$$

Addatur utrinque ny , ut producat

$$\frac{ny(1 + (1+2y)^n)}{(1+2y)^n - 1} = 1 + y + \frac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \frac{(nn-4)yy}{5(1+y) + \dots}}$$

quoae expressio iam ordine satis regulari procedit.

5. Dividamus iam utrinque per $1+y$, et membrum sinistrum ov

$$\frac{ny}{1+y} \cdot \frac{(1+2y)^n + 1}{(1+2y)^n - 1}.$$

Ex parte dextra autem singulae fractiones supra et infra per $1+y$ tur prodibitque haec forma:

$$1 + \frac{(nn-1)yy:(1+y)^2}{3 + \frac{(nn-4)yy:(1+y)^2}{5 + \frac{(nn-9)yy:(1+y)^2}{7 + \frac{(nn-16)yy:(1+y)^2}{9 + \frac{(nn-25)yy:(1+y)^2}{11 + \dots}}}}}$$

6. Hanc igitur expressionem denuo ad maiorem concinnitatem reduc-
statuendo $\frac{y}{1+y} = z$, ita ut sit $y = \frac{z}{1-z}$. Hoc autem modo membrum
strum ob

$$1 + 2y = \frac{1+z}{1-z}$$

accipiet hanc formam:

$$\frac{nz[(1+z)^n + (1-z)^n]}{(1+z)^n - (1-z)^n},$$

quod ergo aequabitur huic fractioni continuae:

$$1 + \frac{(nn-1)zz}{3 + \frac{(nn-4)zz}{5 + \frac{(nn-9)zz}{7 + \frac{(nn-16)zz}{9 + \text{etc.}}}}}$$

quae, ob elegantiam, summam attentionem meretur.

7. Nunc igitur per se manifestum est istam expressionem semper ab-
brumpi, quoties n fuerit numerus integer, sive positivus sive negativus.
Evidens autem est etiam membrum sinistrum eundem valorem retinere
iamsi pro n scribatur $-n$. Hoc enim facto evadet

$$\frac{-nz[(1+z)^{-n} + (1-z)^{-n}]}{(1+z)^{-n} - (1-z)^{-n}},$$

quae fractio, si supra et infra per $(1-zz)^n$ multiplicetur, induet hanc formam

$$\frac{-nz[(1-z)^n + (1+z)^n]}{(1-z)^n - (1+z)^n} = \frac{nz[(1+z)^n + (1-z)^n]}{(1+z)^n - (1-z)^n},$$

quae est ipsa expressio praecedens. Sicque perinde est, sive litterae n
positivus sive negativus tribuatur.

8. Ita si sumamus $n = \pm 1$, fit membrum sinistrum $= 1$, qui etiam
valor dextri. Porro posito $n = \pm 2$ membrum sinistrum evadit $= 1 + 2zz$.
membrum vero dextrum fit etiam $= 1 + 2zz$. Simili modo sumto $n = \pm 3$
pars sinistra, ut et dextra, fiunt $\frac{3(1+3zz)}{3+zz}$.

9. Hinc autem nonnullas conclusiones maximi momenti prouti exponenti n tribuatur valor vel evanescens vel in autem casus, quo litterae z datur valor imaginarius, per conclusionem, quandoquidem ipsa fractio continua nihilominus a qua igitur conclusione initium sumamus.

CONCLUSIO I

QUA $z = t\sqrt{-1}$

10. Hoc igitur casu fractio continua hanc habebit formam

$$1 - \frac{(nn-1)tt}{3 - \frac{(nn-4)tt}{5 - \frac{(nn-9)tt}{7 - \frac{(nn-16)tt}{9 - \text{etc.}}}}}$$

at vero pars sinistra nunc erit

$$\frac{nt\sqrt{-1}[(1+t\sqrt{-1})^n + (1-t\sqrt{-1})^n]}{(1+t\sqrt{-1})^n - (1-t\sqrt{-1})^n},$$

quae non obstantibus partibus imaginariis certe habere debet quem ergo hic investigemus. Hunc in finem ponamus $t = t = \tan. \varphi$; tum igitur erit

$$(1 + t\sqrt{-1})^n = \frac{(\cos. \varphi + \sqrt{-1} \sin. \varphi)^n}{\cos. \varphi^n} = \frac{\cos. n\varphi + \sqrt{-1} \sin. n\varphi}{\cos. \varphi^n}$$

similique modo

$$(1 - t\sqrt{-1})^n = \frac{(\cos. \varphi - \sqrt{-1} \sin. \varphi)^n}{\cos. \varphi^n} = \frac{\cos. n\varphi - \sqrt{-1} \sin. n\varphi}{\cos. \varphi^n}$$

His igitur valoribus substitutis nostrum membrum sinistrum

$$\frac{2n\sqrt{-1} \cdot \tan. \varphi \cos. n\varphi}{2\sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi} = \frac{n \tan. \varphi \cos. n\varphi}{\sin. n\varphi} = \frac{n \tan. \varphi}{\tan. n\varphi}$$

$$\frac{nt}{\operatorname{tg}.n\varphi} = 1 - \frac{(nn-1)tt}{3 - \frac{(nn-4)tt}{5 - \frac{(nn-9)tt}{7 - \text{etc.}}}}$$

gitur hoc modo repraesentari poterit:

$$\operatorname{tg}.n\varphi = \frac{nt}{1 - \frac{(nn-1)tt}{3 - \frac{(nn-4)tt}{5 - \frac{(nn-9)tt}{7 - \text{etc.}}}}}$$

ergo expressio commode adhiberi potest ad tangentes angulorum multiplex tangentem anguli simplicis t exprimendas. Ita si fuerit $n=2$, nus

$$\operatorname{tg}.2\varphi = \frac{2t}{1-tt}.$$

modo si $n=3$, erit

$$\operatorname{tg}.3\varphi = \frac{3t}{1 - \frac{8tt}{3-tt}} = \frac{3t-t^3}{1-3tt}.$$

c casus maxime notabilis se offert quando exponens n accipitur in-
arvus; tum enim erit $\operatorname{tg}.n\varphi = n\varphi$, ergo utrinque per n dividendo
ista forma:

$$\varphi = \frac{t}{1 + \frac{tt}{3 + \frac{4tt}{5 + \frac{9tt}{7 + \text{etc.}}}}}$$

ctione continua per tangentem t ipse angulus exprimitur.

Consideremus nunc casum, quo exponens n accipitur infinite magnus
angulus φ infinite parvus ideoque etiam eius tangens t infinite parva,

ita tamen, ut sit $n\varphi = \theta$ ideoque etiam $n\ell = \theta$; tum igitur fractionem continuam¹⁾:

$$\operatorname{tg.} \theta = \frac{\theta}{1 - \frac{\theta\theta}{3 - \frac{\theta\theta}{5 - \frac{\theta\theta}{7 - \text{etc.}}}}}$$

qua formula ex dato angulo θ eius tangens determinari potest expressio tanquam reciproca praecedentis spectari potest.

CONCLUSIO II

QUA EXPONENS n EVANESCENS ASSUMITUR

13. Hoc ergo casu fractio continua erit

$$1 - \frac{zz}{3 - \frac{4zz}{5 - \frac{9zz}{7 - \frac{16zz}{9 - \text{etc.}}}}}$$

Pro parte sinistra autem notandum est esse

$$\frac{(1+z)^n - 1}{n} = l(1+z)$$

ideoque

$$(1+z)^n = 1 + nl(1+z);$$

simili modo erit

$$(1-z)^n = 1 + nl(1-z),$$

unde membrum sinistrum evadet

$$nz \frac{[2 + nl(1+z) + nl(1-z)]}{nl(1+z) - nl(1-z)} = \frac{2z}{1-z};$$

1) Hanc fractionem continuam iam pridem a celeberrimo J. H. LAMBERTO de l'Académie de Berlin, année 1761 (1768) p. 268) EULERUS ipso summatione 594 (indicio Enestroemiani), LEONHARDI EULERI Opera omnia, vol. Iis,

ergo habebimus istam formam:

$$l \frac{1+z}{1-z} = 1 - \frac{zz}{3} - \frac{4zz^3}{5} - \frac{9zz^5}{7} - \frac{16zz^7}{9} - \text{etc.}$$

que ipse logarithmus sequenti modo exprimitur:

$$l \frac{1+z}{1-z} = \frac{2z}{1-z^2} - \frac{2z^3}{3(1-z^2)^2} + \frac{4zz^3}{5} - \text{etc.}$$

CONCLUSIO III

QUA SUMITUR EXPONENS n INFINITE MAGNUS

14. Hic ergo, ut fractio continua finitum sortiatur valorem, [quod fieri
nit,] nisi quantitas z infinite parva statuatur, ponatur $nz = v$, ut sit $z = \frac{v}{n}$,
e nostra fractio continua erit

$$1 + \frac{vv}{3} + \frac{vv^3}{5} + \frac{vv^5}{7} + \frac{vv^7}{9} + \text{etc.}$$

membro autem sinistro constat esse

$$\left(1 + \frac{v}{n}\right)^n = e^v$$

aliquo modo

$$\left(1 - \frac{v}{n}\right)^n = e^{-v},$$

membrum sinistrum habebit hanc formam:

$$\frac{v(e^v + e^{-v})}{e^v - e^{-v}} = \frac{v(e^{2v} + 1)}{e^{2v} - 1},$$

quam ob rem habebimus hanc memorabilem fractionem cont

$$\frac{v(e^{2v} + 1)}{e^{2v} - 1} = 1 + \frac{vv}{3 + \frac{vv}{5 + \frac{vv}{7 + \frac{vv}{9 + \text{etc.}}}}}$$

cuius valor transcendens etiam hoc modo per series solitas

$$\frac{1 + \frac{vv}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} + \text{etc.}}{1 + \frac{vv}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} + \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} + \text{etc.}}$$

DE UNCIIS POTESTATUM BINOMII EARUMQUE INTERPOLATIONE¹⁾

Conventui exhibuit die 3. Decembris 1781.

Commentatio 768 indicis ENESTROEMIANI

Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Petersbourg 9 (1819/20), 1824, p. 57—76

Evolutionem potestatis $(1+x)^n$ sequenti modo per idoneos characteres
continemus:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \text{etc.},$$

isti characteres uncinulis inclusi

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3} \text{ etc.}$$

referant. Erit ergo

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \text{ etc.}$$

in genere erit

$$\binom{n}{q} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-q+1}{q},$$

Confer hac cum dissertatione Commentationes 19 et 421 indicis ENESTROEMIANI: *LEON-
HARDI OPERA OMNIA*, vol. II4, p. 1 et vol. II7, p. 316. C. B.

LEONHARDI EULERI Opera omnia I 16* Commentationes analyticae

negativi accipiuntur. Ceterum pro casu $q=0$ per se manifestum est, quod $\binom{n}{0} = 1$, siquidem hinc primus terminus potestatis evolutae

2. Cum ipsa evolutio potestatis $(1+x)^n$ alias potestates involvat, nisi quarum exponentes sint numeri integri positivi, interpolationem admittit. Interim tamen si hanc formam $\binom{n}{q}$ interpolationem numerorum n et q spectemus, ita ut, si q consideremus quendam curvae, eius applicata sit $\binom{n}{q}$, nullum est dubium, quandam legem continuitatis sit habitura, quam ergo hic invicem Principia autem interpolationis ex serie hypergeometrica W

1, 2, 6, 24, 120, 720 etc.,

repetere conveniet, quandoquidem evolutio nostrorum characterum finitate cum hac serie est praedita.

3. Quoniam quilibet terminus seriei hypergeometricae involvitur: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot m$, eius loco brevitatis gratia scribitur, uti etiam ista forma tanquam certa functio ipsius m spectari potest interpolationem iam pridem¹⁾ docui atque demonstravi esse

$$\varphi : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \text{ et } \varphi : -\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$$

denotante π peripheriam circuli radio 1 descripti. At si alii valores $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc. sumantur, valores continuo altiores quantitates requirunt; quamobrem, si nostros characteres ad huiusmodi revocaverimus, interpolatio nulla amplius laborat difficultate

1) Confer Commentationem 19 indicis ERNSTROEMIANI, § 15 et § 21; et Commentationem 421, § 16 et § 28: LEONHARDI EULERI Opera omnia, vol. 114, p. 13 et 332. C. B.

PROBLEMA

4. Valorem characteris $\binom{n}{q}$ ad terminos progressionis hypergeometricae referre.

SOLUTIO

Cum sit

$$\binom{n}{q} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q},$$

at vero ex progressionem hypergeometrica sit

$$\varphi : n = n(n-1)(n-2) \cdots 1,$$

ea ita referri potest:

$$\varphi : n = n(n-1)(n-2) \cdots (n-q+1) \times (n-q)(n-q-1) \cdots 1,$$

unde patet numeratorem nostrae fractionis esse

$$\frac{\varphi : n}{\varphi : (n-q)};$$

quamobrem, cum denominator sponte sit $\varphi : q$, valor nostri characteris $\binom{n}{q}$

$$\frac{\varphi : n}{\varphi : q \times \varphi : (n-q)}.$$

COROLLARIUM

5. Quodsi ergo loco n scribamus $a+b$ et a loco q , habebimus in aequationem:

$$\binom{a+b}{a} = \frac{\varphi : (a+b)}{\varphi : a \times \varphi : b},$$

in qua formula litterae a et b permutationem admittunt; unde concluditur semper fore

$$\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$$

unde deduci possunt sequentia theorematum notatum maximo dignum

THEOREMA I

6. *Quicumque numeri pro a , b et n accipiantur, semper haec habebit:*

$$\binom{n}{a} \binom{n-a}{b} = \binom{n}{b} \binom{n-b}{a}.$$

DEMONSTRATIO

Loco n scribatur $a + b + c$, et cum sit per superiorem regulam

$$\binom{a+b+c}{a} = \frac{\varphi : (a+b+c)}{\varphi : a \times \varphi : (b+c)}$$

atque

$$\binom{b+c}{b} = \frac{\varphi : (b+c)}{\varphi : b \times \varphi : c},$$

productum fiet

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \frac{\varphi : (a+b+c)}{\varphi : a \times \varphi : b \times \varphi : c},$$

unde patet litteras a , b , c pro lubitu inter se permutari posse, $a + b + c$ restituto n erit

$$\binom{n}{a} \binom{n-a}{b} = \binom{n}{b} \binom{n-b}{a};$$

utraq; enim pars aequalis est huic formae:

$$\frac{\varphi : n}{\varphi : a \times \varphi : b \times \varphi : c}.$$

THEOREMA 2

7. *Istud productum ex ternis characteribus*

$$\binom{n}{a} \binom{n-a}{b} \binom{n-a-b}{c}$$

per eundem valorem retinet, utcumque litterae a, b, c inter se permutentur.

DEMONSTRATIO

Per reductionem enim ad seriem hypergeometricam habebimus

$$\binom{n}{a} = \frac{\varphi : n}{\varphi : a \times \varphi : (n-a)}, \quad \binom{n-a}{b} = \frac{\varphi : (n-a)}{\varphi : b \times \varphi : (n-a-b)},$$

$$\binom{n-a-b}{c} = \frac{\varphi : (n-a-b)}{\varphi : c \times \varphi : (n-a-b-c)},$$

productum propositum reducetur ad hanc formam:

$$\frac{\varphi : n}{\varphi : a \times \varphi : b \times \varphi : c \times \varphi : (n-a-b-c)},$$

expressio manifesto eundem retinet valorem, utcumque litterae a, b, c se permutentur, quod cum pluribus modis fieri possit, etiam plura huius-producta inter se aequalia exhiberi poterunt.

COROLLARIUM

8. Hoc modo ulterius progredi licet atque demonstrari poterit istud pro-

$$\binom{n}{a} \binom{n-a}{b} \binom{n-a-b}{c} \binom{n-a-b-c}{d}$$

ut eundem valorem retinere, utcumque litterae a, b, c, d permutentur. enim valor semper erit

$$\frac{\varphi : n}{\varphi : a \times \varphi : b \times \varphi : c \times \varphi : d \times \varphi : (n-a-b-c-d)}.$$

THEOREMA 3

9. Hoc productum: $\binom{a}{b} \binom{b}{a}$ semper aequale est huic characteri: $\binom{0}{a-b}$

DEMONSTRATIO

Cum enim sit per reductionem ad numeros hypergeometricos

$$\binom{a}{b} = \frac{\varphi : a}{\varphi : b \times \varphi : (a - b)}$$

et

$$\binom{b}{a} = \frac{\varphi : b}{\varphi : a \times \varphi : (b - a)},$$

manifesto est

$$\binom{a}{b} \binom{b}{a} = \frac{1}{\varphi : (a - b) \times \varphi : (b - a)}.$$

Tum vero simili modo erit

$$\binom{0}{a-b} = \frac{\varphi : 0}{\varphi : (a - b) \times \varphi : (b - a)} = \frac{1}{\varphi : (a - b) \times \varphi : (b - a)}$$

ob $\varphi : 0 = 1$, unde sequitur

$$\binom{a}{b} \binom{b}{a} = \binom{0}{a-b};$$

hincque patet hoc productum semper nihilo aequari, quoties $a - b$ minus integer.

SCHOLION

10. His praemissis sit $\left(\frac{P}{Q}\right)$ forma generalis omnium huius generationum, quas hic evolvere constitui, ubi P et Q denotent numeros quosque, sive integros sive fractos sive negativos sive positivos, ita ut formula infinities-infinita multitudo casuum contineatur, atque iam notum quoties denominator Q fuerit numerus integer positivus, evolutionem semper institui posse; unde has formas: $\left(\frac{P}{i}\right)$ pro cognitis habebimus quae ope reliquos casus ad maiorem simplicitatem reducere conabimur. Quanti autem theoremati numerus omnium casuum ad semissem redigatur

THEOREMA 4

11. *Omnes casus huius formae: $\left(\frac{P}{Q}\right)$ facillime reducuntur ad casus, quibus Q maior quam $\frac{1}{2} P$.*

DEMONSTRATIO

Ponatur enim $Q = \frac{1}{2} P - s$, et cum sit in genere

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{a-b}\right),$$

erit

$$\left(\frac{P}{\frac{1}{2} P - s}\right) = \left(\frac{P}{\frac{1}{2} P + s}\right)$$

utque omnes casus, quibus Q superatur ab $\frac{1}{2} P$, prorsus congruant cum iis quibus superat $\frac{1}{2} P$.

COROLLARIUM

12. Si ergo concipiatur curva, cuius abscissae x respondeat applicata $y = \left(\frac{a}{x}\right)$, tum applicata abscissae $x = \frac{1}{2} a$ simul erit diameter curvae, quandoque binis abscissis $x = \frac{1}{2} a + t$ et $x = \frac{1}{2} a - t$ aequales respondent applicatae; unde sufficiet alteram tantum medietatem curvae determinasse.

SCHOLIUM

13. Cum igitur hoc modo omnes casus in formula $\left(\frac{P}{Q}\right)$ contenti ad similes reducantur, in sequentibus ostendam, quomodo intra multo arctiores limites compingi queant. Si scilicet littorae m et n denotent numeros integros positivos, haec formula generalis: $\left(\frac{p \pm \frac{m}{n}}{q \pm \frac{m}{n}}\right)$ semper reduci potest ad hanc formam: $M \cdot \left(\frac{p}{q}\right)$, ubi valor factoris M absolute assignari potest. Hoc igitur modo forma nostra generalis $\left(\frac{P}{Q}\right)$ semper redigi poterit ad talem: $\left(\frac{p}{q}\right)$, in qua numeri p et q intra limites 0 et 1 subsistant. Quin etiam redigi possent inter limites 0 et -1 . Huic igitur reductioni inservient sequentia problemata, quorum solutiones his lemmatibus innituntur.

LEMMA 1

14. Cum sit

$$\left(\frac{p+m}{m}\right) = \frac{\varphi:(p+m)}{\varphi:m \times \varphi:p},$$

erit

$$\varphi:(p+m) = \varphi:m \times \varphi:p \times \left(\frac{p+m}{m}\right),$$

cuius characteris valor ob m numerum integrum positivum semper abs-
potebit. Eodem igitur modo erit

$$\varphi:(q+n) = \varphi:n \times \varphi:q \times \left(\frac{q+n}{n}\right).$$

LEMMA 2

15. Cum sit

$$\left(\frac{p}{m}\right) = \frac{\varphi:p}{\varphi:m \times \varphi:(p-m)},$$

concluditur fore

$$\varphi:(p-m) = \frac{\varphi:p}{\varphi:m} : \left(\frac{p}{m}\right).$$

Eodem modo erit

$$\varphi:(q-n) = \frac{\varphi:q}{\varphi:n} : \left(\frac{q}{n}\right).$$

PROBLEMA 1

16. Hanc formulam: $\left(\frac{p+q}{q}\right)$, ubi m denotat numerum integrum
reducere ad hanc simplicio rem: $\left(\frac{p}{q}\right)$.

SOLUTIO

Per reductionem nostram generalem ad numeros hypergeometricos

$$\left(\frac{p+q}{q}\right) = \frac{\varphi:(p+q)}{\varphi:q \times \varphi:(p-q+m)}.$$

si iam hic ex lemmate primo loco $\varphi : (p + m)$ et $\varphi : (p - q + m)$ valores statuamus, prodibit

$$\binom{p+m}{q} = \frac{\varphi : p}{\varphi : q \times \varphi : (p - q)} \times \frac{\binom{p+m}{m}}{\binom{p-q+m}{m}}.$$

igitur sit

$$\varphi : q \times \varphi : (p - q) = \binom{p}{q},$$

habebimus

$$\binom{p+m}{q} = \frac{\binom{p+m}{m}}{\binom{p-q+m}{m}} \times \binom{p}{q}.$$

PROBLEMA 2

17. *Hanc formulam: $\binom{p-m}{q}$, ubi m sit numerus integer positivus, reducere ad formam simpliciore $\binom{p}{q}$.*

SOLUTIO

Reductio nostra statim praebet hanc aequationem:

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\varphi : (p-m)}{\varphi : q \times \varphi : (p-q-m)}.$$

Iam loco $\varphi : (p-m)$ et $\varphi : (p-q-m)$ valores ex lemmate secundo substituantur, ac reperietur sequens expressio:

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\varphi : p}{\varphi : q \times \varphi : (p-q)} \times \frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}},$$

cum sit

$$\varphi : q \times \varphi : (p-q) = \binom{p}{q},$$

habebimus formam:

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}} \times \binom{p}{q}.$$

Reductio nostra hic praebet

$$\left(\begin{matrix} p \\ q+n \end{matrix}\right) = \frac{\varphi:p}{\varphi:(q+n) \times \varphi:(p-q-n)}.$$

Iam ex lemmate primo loco $\varphi:(q+n)$, ex secundo vero loco valores substituantur prodibitque

$$\left(\begin{matrix} p \\ q+n \end{matrix}\right) = \frac{\varphi:p}{\varphi:q \times \varphi:(p-q)} \times \frac{\left(\begin{matrix} p-q \\ n \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} q+n \\ n \end{matrix}\right)} = \frac{\left(\begin{matrix} p-q \\ n \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} q+n \\ n \end{matrix}\right)} \times \left(\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right).$$

PROBLEMA 4

19. Hanc formulam: $\left(\begin{matrix} p \\ q-n \end{matrix}\right)$, ubi n denotet numerum integrum formam simpliciore $\left(\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right)$ reducere.

SOLUTIO

Per reductionem ad numeros hypergeometricos erit

$$\left(\begin{matrix} p \\ q-n \end{matrix}\right) = \frac{\varphi:p}{\varphi:(q-n) \times \varphi:(p-q+n)}.$$

Quodsi iam loco $\varphi:(q-n)$ ex lemmate secundo, at loco φ lemmate primo valores substituantur, resultabit expressio

$$\left(\begin{matrix} p \\ q-n \end{matrix}\right) = \frac{\varphi:p}{\varphi:q \times \varphi:(p-q)} \times \frac{\left(\begin{matrix} q \\ n \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} p-q+n \\ n \end{matrix}\right)} = \frac{\left(\begin{matrix} q \\ n \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} p-q+n \\ n \end{matrix}\right)} \times \left(\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right).$$

PROBLEMA 5

20. Si fuerit

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{p+m}{q+n}\right),$$

ius valorem ad hanc formam reducere: $M\left(\frac{p}{q}\right)$, ubi M absolute assignare liceat, inde quod m et n sint numeri integri positivi.

SOLUTIO

Ex problemate 1 invenimus

$$\left(\frac{p+m}{q}\right) = \frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q+n}{m}\right)} \times \left(\frac{p}{q}\right).$$

quodsi iam hic loco q ubique scribamus $q+n$, erit

$$\left(\frac{p+m}{q+n}\right) = \frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q-n+n+m}{m}\right)} \times \left(\frac{p}{q+n}\right).$$

hic loco $\left(\frac{p}{q+n}\right)$ valorem ex problemate 3 substituamus, quo facto fiet

$$\left(\frac{p+m}{q+n}\right) = \frac{\left(\frac{p+m}{m}\right) \times \left(\frac{p-q}{n}\right)}{\left(\frac{p-q-n+n+m}{m}\right) \times \left(\frac{q+n}{n}\right)} \times \left(\frac{p}{q}\right),$$

ubi igitur erit

$$M = \frac{\left(\frac{p+m}{m}\right) \times \left(\frac{p-q}{n}\right)}{\left(\frac{p-q-n+n+m}{m}\right) \times \left(\frac{q+n}{n}\right)},$$

ius valorem ob m et n numeros integros positivos semper absolute assignare licebit.

PROBLEMA 6

21. Si fuerit

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{p+m}{q-n}\right),$$

eius valorem reducere ad formam $M\left(\frac{p}{q}\right)$.

SOLUTIO

Ex problemate primo cum sit

$$\left(\frac{p+m}{q}\right) = \frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q+m}{m}\right)} \times \left(\frac{p}{q}\right),$$

hic ubique loco q scribatur $q-n$, ut prodeat

$$\left(\frac{p+m}{q-n}\right) = \frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q+n+m}{m}\right)} \times \left(\frac{p}{q-n}\right),$$

atque hic loco $\left(\frac{p}{q-n}\right)$ valor ex problemate 4 substituat, quo facta nostra hanc impetrabimus expressionem:

$$\left(\frac{p+m}{q-n}\right) = \frac{\left(\frac{p+m}{m}\right) \times \left(\frac{q}{n}\right)}{\left(\frac{p-q+n+m}{m}\right) \times \left(\frac{p-q+n}{n}\right)} \times \left(\frac{p}{q}\right).$$

PROBLEMA 7

22. Si fuerit

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{p-m}{q+n}\right),$$

eius valorem reducere ad formam $M\left(\frac{p}{q}\right)$.

SOLUTIO

In problemate 2 invenimus

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}} \times \binom{p}{q},$$

si si loco q scribamus $q+n$ orietur forma **proposita**

$$\binom{p-m}{q+n} = \frac{\binom{p-q-n}{m}}{\binom{p}{m}} \times \binom{p}{q+n}.$$

inc si ex problemate 3 loco $\binom{p}{q+n}$ valor substituatur, orietur expressio

$$\binom{p-m}{q+n} = \frac{\binom{p-q-n}{m} \times \binom{p-q}{n}}{\binom{p}{m} \times \binom{q+n}{n}} \times \binom{p}{q}.$$

PROBLEMA 8

23. Si fuerit

$$\binom{P}{Q} = \binom{p-m}{q-n},$$

ut valorem ad formam simplicem $M\left(\frac{p}{q}\right)$ reducere.

SOLUTIO

Sumatur iterum ex problemate secundo expressio

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}} \times \binom{p}{q}$$

in eaque loco q scribat $q - n$, ut oriat *forma* proposita

$$\left(\frac{p-m}{q-n}\right) = \frac{\left(\frac{p-q+n}{m}\right)}{\left(\frac{p}{m}\right)} \times \left(\frac{p}{q-n}\right),$$

unde, substituendo loco characteris $\left(\frac{p}{q-n}\right)$ eius valorem prout, prodibit

$$\left(\frac{p-m}{q-n}\right) = \frac{\left(\frac{p-q+n}{m}\right) \times \left(\frac{q}{n}\right)}{\left(\frac{p}{m}\right) \times \left(\frac{p-q+n}{n}\right)} \times \left(\frac{p}{q}\right).$$

COROLLARIUM

24. Quoties igitur denominator Q fuerit numerus integer sive negativus, tum loco q semper statui poterit 0, et quales formulæ $\left(\frac{p}{Q}\right)$ per nostras reductiones semper absolute quia in omnibus characteribus denominatores sunt vel m vel n integri. Tantum igitur superest, ut eos casus investigemus quæpiam fractio sive positiva sive negativa, quæ [formula] $\left(\frac{p}{q}\right)$ ad $\left(\frac{p}{q}\right)$, ubi q erit fractio simplicissima eiusdem generis minor; quamobrem totum negotium eo redit, ut valor huius indagetur, quando q est fractio. Pro his igitur casibus valor per formulam quandam integralem exprimemus.

PROBLEMA

25. Valorem formulæ $\left(\frac{p}{q}\right)$ per formulam integralem exprime

SOLUTIO

Hunc in finem consideremus hanc formulam:

$$\int x^{q-1} \partial x (1-x)^n,$$

valor ab $x=0$ ad $x=1$ extensus designetur per Δ ; qui cum sit certa ratio ipsius q , puta $f:q$, loco q hic scribamus $q+1$ et $\Delta' = f:(q+1)$;

$$\Delta - \Delta' = \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{q+1};$$

que modo ex quovis casu numeri n reperietur valor ipsius Δ pro casu 1. Incipiamus a casu $n=0$ et valores ipsius Δ pro sequentibus numeris se habebunt:

n	Δ
0	1 q
1	1 $q(q+1)$
2	$1 \cdot 2$ $q(q+1)(q+2)$
3	$1 \cdot 2 \cdot 3$ $q(q+1)(q+2)(q+3)$

Hinc iam manifestum est fore in genere

$$\Delta = \frac{1}{q} \times \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{(q+1)(q+2)(q+3) \cdot \dots (q+n)}$$

Cum nunc sit

$$\binom{q+n}{n} = \frac{(q+n)(q+n-1) \cdot \dots (q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n},$$

est fore

$$\Delta = \frac{1}{q} : \binom{q+n}{n},$$

vicissim erit

$$\binom{q+n}{n} = \frac{1}{q\Delta}.$$

anc $q+n=p$ sive $n=p-q$, ut fiat

$$\binom{p}{n} = \binom{p}{p-n} = \binom{p}{q},$$

et cum iam sit

$$\Delta = \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{p-q},$$

concludimus fore

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{p-q}},$$

ita ut valor huius formulae integralis ab $x=0$ ad $x=1$ extensus ad valorem characteris $\left(\frac{p}{q}\right)$.

COROLLARIUM

26. Quaecunque ergo fractiones loco p et q substituantur, semper algebraica exhiberi potest, a cuius quadratura, eaque definita scilicet $x=1$, valor formulae $\left(\frac{p}{q}\right)$ pendeat.

SCHOLION 1

27. Analysis, qua hic usi sumus, videtur quidem tantum locum habere in casibus, quibus n est numerus integer positivus, neque ergo ad casum ubi $p-q$ est fractio, applicari posse. Verum ipsum principium eadem applicationem ad numeros fractos satis confirmare videtur; inter alia iuvabit consensus cum veritate in casu aliunde cognito ostendisse. retur ergo haec formula: $\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$, ubi $p=1$ et $q=\frac{1}{2}$, eritque per rationem generalem

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\varphi:1}{\varphi:\frac{1}{2} \times \varphi:\frac{1}{2}},$$

quae expressio, ob $\varphi:1=1$ et $\varphi:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, evadit $\frac{4}{\pi}$. Nunc igitur videtur num ista expressio conveniat cum

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} (1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

At vero iste denominator posito $x=yy$ abit in

$$\int \partial y \sqrt{1-yy} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{1-yy}} - \int \frac{yy \partial y}{\sqrt{1-yy}}.$$

Constat autem, his integralibus ab $y = 0$ ad $y = 1$ extensis, esse

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{1-yy}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int \frac{yy \partial y}{\sqrt{1-yy}} = \frac{\pi}{4},$$

ita ut differentia sit $\frac{\pi}{4}$, ideoque valor hic inventus $\frac{\pi}{4}$ egregie convenit cum praecedente.

SCHOLION 2

28. Quod autem ad formulam integram $\int x^{p-1} \partial x (1-x)^{q-1}$ attinet, analysi patet eius valorem, ab $x=0$ ad $x=1$ extensum, finitum fieri non posse, nisi sit $q > 0$ simulque $p-q > -1$. Quoniam vero in nostra potestas est istos numeros p et q , ad quos formulam generalem $\left(\frac{P}{Q}\right)$ reduximus, inter limites 0 et 1 redigere, formula integralis inventa semper ad omnes placescas transferri poterit. Ceterum iam manifestum est casibus, quibus Q casus numerus integer sive positivus sive negativus, evolutionem actu institui possit, quocque etiam succedet casibus, quibus $P-Q$ est numerus integer, unde usque nostrae formulae integralis erit amplissimus casibus, quibus neque Q neque $P-Q$ sunt integri. Casus maxime memorabilis hic occurrit, quando P et Q numerus integer sive positivus sive negativus; tum enim, quaecunque fractio pro Q accipiat, valor huius expressionis $\left(\frac{P}{Q}\right)$ per peripheriam circuli assignari poterit.

PROBLEMA

29. Valorem formulae $\left(\frac{P}{Q}\right)$, quoties P fuerit numerus integer sive positivus sive negativus, ad quadraturam circuli reducere.

SOLUTIO

Quando P est numerus integer sive positivus sive negativus, ista formula semper reduci poterit ad hanc: $\left(\frac{0}{q}\right)$, ita ut $p = 0$; sicque per formulam integram erit

$$\left(\frac{0}{q}\right) = \frac{1}{q \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{-q}};$$

quamobrem hanc formulam integram accuratius evolvamus
hanc formam:

$$\int \frac{\partial x}{x} \left(\frac{x}{1-x} \right)^i$$

posito

$$\frac{x}{1-x} = z \quad \text{sive} \quad x = \frac{z}{1+z}$$

a $z=0$ usque ad $z=\infty$ extendi debet. Ob

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial z}{z(1+z)}$$

vero formula transmutatur in hanc:

$$\int \frac{z^{i-1} \partial z}{1+z}$$

At vero olim¹⁾ ostendi huius formulae integralis²⁾

$$\int \frac{z^{m-1} \partial z}{1+z^n}$$

valorem a $z=0$ ad $z=\infty$ extensum esse

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}.$$

Nostro igitur casu erit $m=q$ et $n=1$, unde nostrum in
quo substituto habebimus

$$\left(\frac{0}{q} \right) = \frac{1}{\frac{q\pi}{\sin. q\pi}} = \frac{\sin. q\pi}{q\pi}.$$

1) Vide e. g. Commentationem 254 indicis ENESTROMIANI, § 46, *Opera omnia*, vol. I, p. 260. C. B.

2) Editio princeps: $\int \frac{z^{m-1} \partial z}{(1+z)^n}$; correxit C. B.

ula illa ob $\sin.q\pi = 0$ semper in nihilum abit solo casu excepto $q = 0$.
 tanto autem q quasi infinite parvo ob $\sin.q\pi = q\pi$ erit utique

$$\left(\frac{0}{q}\right) = 1,$$

quemadmodum rei natura postulat.

COROLLARIUM

31. Cum per reductionem nostram generalem sit

$$\left(\frac{0}{q}\right) = \frac{\varphi:0}{\varphi:q \times \varphi:-q},$$

ob $\varphi:0 = 1$ erit

$$\varphi:q \times \varphi:-q = \frac{q\pi}{\sin.q\pi},$$

ita ut, quicumque valores ipsi q tribuantur. tam valores $\varphi:q$ quam $\varphi:-q$
 ad quantitates transcendentes superiorum generum referantur; interim tamen
 eorum productum per quadraturam circuli exprimetur.

SCHOLION

32. Cum sit

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q \int x^{q-1} dx (1-x)^{p-q}},$$

siquidem hoc integrale ab $x=0$ ad $x=1$ extendatur, si istos valores in theo-
 rematibus supra allatis circa relationem formularum $\left(\frac{p}{q}\right)$ substituamus, sequen-
 tia nanciscomur theoremata pro relatione formularum integralium, quae
 maximo videntur memorabilia.

THEOREMA

33. Si sequentia integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ extendantur, sequens aequalitas subsistet:

$$\int x^{a-1} \partial x (1-x)^{n-a} \times \int x^{b-1} \partial x (1-x)^{n-a-b} \\ = \int x^{b-1} \partial x (1-x)^{n-b} \times \int x^{a-1} \partial x (1-x)^{n-b-a}.$$

COROLLARIUM

34. Si in talibus formulis exponents ipsius x evanescat, ut habet

$$\int \partial x (1-x)^p,$$

eius valor absolute assignari potest eritque $\frac{1}{p+1}$. At si exponens $1-x$ evanescat, ut habeamus

$$\int x^p \partial x,$$

eius valor manifesto erit $\frac{1}{p+1}$; sin autem formula integralis fuerit

$$\int x^{q-1} \partial x (1-x)^{-q},$$

eius valor, ut vidimus, erit $\frac{\pi}{\sin \frac{q}{2}\pi}$, unde plures relationes notatu dignae sunt. Ceterum hic notasse iuvabit, exponentes ipsius x et $1-x$ permutari posse, ita ut semper sit

$$\int x^p \partial x (1-x)^q = \int x^q \partial x (1-x)^p.$$

THEOREMA

35. Si omnia integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ extendantur, productum trium formularum integralium:

$$\int x^{a-1} \partial x (1-x)^{n-a} \times \int x^{b-1} \partial x (1-x)^{n-a-b} \times \int x^{c-1} \partial x (1-x)^{n-a-b-c}$$

semper eundem valorem retinebit, quomodocunque litterae a, b, c inter se permutentur.

THEOREMA

36. Si omnia integralia ab $x=0$ ad $x=1$ extendantur, productum ex quatuor formulis integralibus semper eundem valorem retinebit, quomodocunque litterae a, b, c, d inter se permutantur, scilicet

$$\begin{aligned} \int x^{a-1} \partial x (1-x)^{n-a} &\times \int x^{b-1} \partial x (1-x)^{n-a-b} \\ &\times \int x^{c-1} \partial x (1-x)^{n-a-b-c} \times \int x^{d-1} \partial x (1-x)^{n-a-b-c-d}. \end{aligned}$$

COROLLARIUM

36a.¹⁾ Illic evidens est numerum talium formularum integralium contineri ulterius augeri posse, unde numerus variationum, quae in singulis productis locum habere possunt, in infinitum excrecet; ubi quidem observo, casum simplicissimum theorematidis primi prorsus convenire cum iis, quae olim²⁾ de relatione inter diversas formulas integrales proposuoram.

SCHOLIUM

37. Omnia illa integralia in hac forma generali continentur:

$$\int x^p \partial x (1-x)^q,$$

quam constat plurimis modis in alias formas transmutari posse, dum scilicet binos exponentes p et q quovis numero integro sive augere sive minuere liceat. Et quoque inter has diversas formas sine dubio simplicissima est ea, in qua isti exponentes intra limites 0 et -1 deprimuntur, quam transformationem per sequentes reductiones commodissime institui posse facile patet:

1) In editione principe numerus 36 per errorem bis occurrit. C. B.

2) Vide e. g. Commentationem 254 indicis ENESTROEMIANI, § 40; LEONHARDI EULERI Opera omnia, vol. I. 17, p. 257. C. B.

$$\int x^p \partial x (1-x)^q = \frac{1}{p+q+1} \int x^{p+1} \partial x (1-x)^q,$$

$$\int x^p \partial x (1-x)^q = \frac{p+q+2}{q+1} \int x^{p+1} \partial x (1-x)^{q+1}.$$

Saepe numero etiam haec reductio, qua binae praecedentium similes insignem usum praestat:

$$p \int x^{p-1} \partial x (1-x)^q = q \int x^p \partial x (1-x)^{q-1}.$$

PROBLEMA

38. *Describere lineam curvam, cuius abscissae x respondeat applicatae y aequales, ubi m denotet numerum integrum positivum.*

SOLUTIO

Hic primo investigentur applicatae, quando abscissae x tribuuntur, easque immediate ex forma $y = \binom{m}{x}$ facile definire.

$$\left(\frac{m}{0}\right) = 1; \quad \left(\frac{m}{1}\right) = m; \quad \left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \text{ etc.,}$$

donec perveniatur ad $x = m$, ubi iterum est $\left(\frac{m}{m}\right) = 1$. Praeterea omnes applicatae, quae respondent valoribus negativis ipsius x maioribus quam m , evanescent. At vero iam observavimus, quod applicatae semper praeditae esse diametro, quem praebet applicata abscissae x respondens, unde sufficiet casus tantum evolvere, quibus $x > m$.

At si abscissae x valores fractos tribuamus, necesse est etiam $\left(\frac{m}{x}\right)$ ad hanc reducere: $\left(\frac{0}{x}\right)$, quippe cuius valorum ostendi

quod facillime praestatur ope reductionis supra allatae, qua ostendimus

$$\binom{p+m}{q} = \binom{p+m}{m} \times \binom{p}{q}.$$

igitur fiat $p = 0$ et $q = x$ atque colligitur

$$\binom{m}{x} = \frac{\binom{0}{x}}{\binom{m-x}{m}} = \frac{\sin. \pi x}{\pi x} : \binom{m-x}{m}.$$

formulam evolvendam unicum intervallum abscissae $= 1$ percurrisse sufficit, quem in finem statuamus $x = n + q$, ita ut q sit fractio unitate minor, ante n numero integro quovis, eritque $\sin. \pi x = \pm \sin. \pi q$, ubi signum dabit, si n sit numerus par, — vero si impar. Hoc observato habebimus

$$y = \pm \frac{\sin. q \pi}{\pi(q+n)} : \binom{m-n-q}{m},$$

qua formula iam omnes valores intermedii facile assignari poterunt sicque curva erit descripta.

COROLLARIUM

39. Hic evidens est istius curvae maximam applicatam semper respondere abscissae $x = \frac{1}{2} m$, quae simul erit curvae diameter, cuius determinatio casibus, quibus m est numerus par, nulla laborat difficultate; at si m sit numerus impar, ista maxima applicata a quadratura circuli pendebit, quam in huius problemate investigemus.

PROBLEMA

40. Investigare maximam applicatam curvae modo ante descriptae, qua abscissae respondeat applicata $y = \binom{m}{x}$.

hic duos casus evolveri oportebit, prout m fuerit vel non fuerit.
 Sit igitur primo $m = 2i$, erit

$$M = \binom{2i}{i},$$

cuius valorem iam dudum¹⁾ constat reduci ad hanc expres-

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots i}.$$

Hinc enim patet, pro casu $i = 1$ fore $M = 2$. Si $i = 2$,
 $i = 3$, erit $M = 20$ et ita porro.

At si m fuerit numerus impar, ponatur $m = 2i + 1$ et

$$M = \binom{2i+1}{i+\frac{1}{2}},$$

qui valor, si ad numeros hypergeometricos reducat, fiet

$$M = \frac{q : (2i+1)}{(q : (i+\frac{1}{2}))^2},$$

ubi est

$$q : (2i+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2i+1).$$

At cum sit

$$q : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$$

hincque porro

$$q : \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1,$$

$$q : \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 1$$

ideoque in genere

$$q : \left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i+1)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} \cdot 1 \cdot 1.$$

1) Vido demonstrationem in Commentatione 575 indicis *Enumeratio*
Opera omnia, vol. I16, p. 553. C. B.

$$\varphi : (2i + 1) \quad \varphi : (i + \frac{1}{2}) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2i \times \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\varphi : (2i + 1) \quad \varphi : (i + \frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdots 4i,$$

expressio denuo per $\varphi : (i + \frac{1}{2})$ divisa subministrat istam:

$$\frac{\varphi : (2i + 1)}{(\varphi : (i + \frac{1}{2}))^2} = \frac{4}{\pi} \times \frac{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32 \cdots 8i}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2i + 1)}.$$

in casu $m = 1$ erit $i = 0$ et

$$M = \frac{4}{\pi},$$

in casu $m = 3$ erit $i = 1$ et

$$M = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{32}{3\pi},$$

in casu $m = 5$ erit $i = 2$ et

$$M = \frac{8 \cdot 16}{3 \cdot 5} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{612}{15\pi}$$

porro.

PROBLEMA

1. Describere curvam, cuius abscissis x respondeant applicatae $\left(\frac{-m}{x}\right)$, denotant numerum quemcunque integrum positivum.

SOLUTIO

Ex ipsa hac formula $y = \left(\frac{-m}{x}\right)$ sine difficultate oliciuntur applicatae pro quibus abscissis per numeros integros expressis; erit enim

$$\left(\frac{-m}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-m}{1}\right) = -m, \quad \left(\frac{-m}{2}\right) = \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$$

porro, quae ergo applicatae signis alternantibus in infinitum progredi-
Pro applicatis praecedentibus notetur esse

$$\left(\frac{-m}{-m}\right) = 1, \quad \left(\frac{-m}{-m-1}\right) = -m \text{ etc.}$$

ad formulam $\binom{p}{x}$. Supra autem invenimus esse

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}} \times \binom{p}{q}.$$

Quodsi iam hic faciamus $p = 0$ et $q = x$, erit

$$\binom{-m}{x} = \frac{\binom{-x}{m}}{\binom{0}{m}} \times \binom{0}{x} = \frac{\binom{-x}{m}}{\binom{0}{m}}.$$

Quia igitur formula $\binom{0}{m}$ semper evanescit, numeratores
 numeros integros pro x , nunquam evanescere potest, et
 tam y semper esse infinitam, qui est casus prorsus
 habentis applicatas finitas, inter quas intermediae or-
 ginae; cuiusmodi casus mihi quidem adhuc nondum oc-
 currebat. tione Geometrarum haud indignum esse arbitror.

SERIES MAXIME IDONEAE PRO CIRCULI QUADRATURA PROXIME INVENIENDA¹⁾

Commentatio 809 indicis EXESTROEMIANI

Opera postuma t. 1862, p. 288—298

1. Antequam Analyseos infinitorum principia essent perspecta, nulla alia via rationem peripheriae ad diametrum explorandi patebat praeter considerationem polygonorum circulo cum inscriptorum tum circumscriptorum. Ex hoc fonte primum ARCHIMEDES notissimam proportionem 22 ad 7, tum vero verius veritati propiorum 355 ad 113 elicit; deinceps tandem LUDOLPHUS a CEULENBERG hanc proportionem ad 35 figuras in partibus decimalibus produxit, quomodo standum et molestissimum laborem certe vix ulterius prosequi licuisset. Deinde vero, cum, Analysis infinitorum ope, series idoneae rationem diametri ad peripheriam exprimentes essent exhibitae, multo minore labore ratio LUDOLPHIANA multo longius, primo scilicet a SCHARPIO ad 72, tum vero a MACHINO ad 100 ac denique a LAGNIO ad 128 figuras decimales est continuata; ex qua ratione si circumferentia circuli, cuius diameter distantiam stellarum fixarum maxime remotarum superaret, computaretur, ne millesima quidem pollicis parte a veritate aborreretur.

2. Assidui autem hi calculatores, quorum industria summam meretur etiam laudem et admirationem, omnes usi sunt serie, qua arcus circuli ex tangente definitur, ita ut posita tangente = t , radio existente = 1, arcus respondens sit

$$= t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \text{etc.},$$

1) In *Operum postumorum* argumento loco verbi „invenienda“ legitur „investiganda“. — Confer hac cum dissertatione Commentationes indicis EXESTROEMIANI 74, 125, 275, 561 voluminum praecedentium, imprimis autem Commentationem 705 huius voluminis. C. B.

quae series utique maxime convergens recte posita, et non g
 diminuere liceret. Verum cum hinc ratio diametri ad periph
 nequeat, nisi arcus ille ad totam peripheriam assignabilem et
 rationem, vix minorem arcum in hunc finem accipere licet, q
 tangens est $\frac{1}{\sqrt{3}}$; unde denotante π peripheriam circuli, cuius
 = 1, fit

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + e \right)$$

seu

$$\pi = \sqrt{12} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + e \right)$$

Etsi enim angulus 18° , cuius tangens est $\sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{1}{5}}}$, series
 reddat convergentem, duplex tamen irrationalitas calculum tant
 reddit, ut nullum inde compendium sperari possit, quae moles
 bus angulis multo magis increscit.

3. Exercitissimus etiam calculator LAGNUS, qui hunc
 gissime est prosecutus, angulum 30° aliis minoribus in hoc
 ferendum censuit; vorum antequam ipsius seriei terminos evol
 numero 12 radicem quadratam ultra 128 figuras decimales ex
 erat coactus; quem laborem certe 12 horarum spatio expediri
 quin potius crediderim auctorem ei aliquot adeo dies insudasse,
 summa, qua opus est, attentio cum relaxationem tum revision
 operationum repetitionem postulat. Hoc autem labore exantla
 265 terminos ad minimum evolvere debebat; primo igitur nu
 128 figuras expressum continuo 265 vicibus per ternarium d
 ad quod negotium, si cuiusque figurae inventioni et scriptioni
 secundum tribuamus, quinque horae vix sufficiebant. Deinde
 gulos respective per numeros impares 3, 5, 7, 9, 11, 13 etc. divi
 quae opera ob divisores continuo maiores ad minimum tempu
 ideoque 10 horarum postulabat. Donique additio cum termi
 tivorum tum negativorum utraque seorsim breviori quam qu
 spatio expediri laud poterat, sicque totus labor intra 37 hora
 diligentia neutiquam potuerat absolvi. Nullum autem est dubi
 tempus duplo imo triplo maius impenderit.

$$\frac{\pi}{4} = \text{Ang. tang } 1 = \text{Ang. tang } \frac{1}{2} + \text{Ang. tang } \frac{1}{3},$$

per duas series

$$\begin{aligned} \pi = & + 2 \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 4^2} - \frac{1}{7 \cdot 4^3} + \frac{1}{9 \cdot 4^4} - \text{etc.} \right) \\ & + \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} - \frac{1}{7 \cdot 9^3} + \frac{1}{9 \cdot 9^4} - \text{etc.} \right), \end{aligned}$$

um adeo prior magis convergit quam praecedens ex tangente anguli 30° a; neque hic ulla extractione radice opus est, quae sola in calculo praestanti laborem 12 horarum postulaverat. Deinde priores utriusque seriei ini saltem multo minore labore evolvuntur, cum vel paucis constantis vel periodum in iis agnoscant, unde calculus admodum fit expeditus. autem hic duas series in unam summam colligi oportet, tamen quia s convergunt, multo paucioribus opus est terminis; ita, si fractionem malom pro π ad 128 figuras instam desideremus, prioris seriei terminos posterioris vero 132 capi conveniet, qui totus labor praecedente ratione inatus vix 24 horas requirere videtur.

5. Deinde ex eodem principio, cum sit in genere

$$\text{Ang. tang } \frac{1}{a} = \text{Ang. tang } \frac{1}{b} + \text{Ang. tang } \frac{b-a}{ab+1},$$

$$\text{Ang. tang } \frac{1}{2} = \text{Ang. tang } \frac{1}{3} + \text{Ang. tang } \frac{1}{7}$$

que

$$\frac{\pi}{4} = 2 \text{ Ang. tang } \frac{1}{3} + \text{Ang. tang } \frac{1}{7},$$

1) Vido Commentationem supra laudatam 74 indicis ENESTROEMIANI: *De variis modis circuli aeternam numeris proxime exprimendi*, § 11. LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, vol. III, p. 252.

$$+ \frac{4}{7} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 49} + \frac{1}{5 \cdot 49^2} - \frac{1}{7 \cdot 49^3} + \frac{1}{9 \cdot 49^4} - \frac{1}{11 \cdot 49^5} + \dots \right)$$

Hinc ergo si valor ipsius π ad 128 figuras iustus colligi debet, 132 terminos, posterioris vero tantum 75 terminos evoluisse, autem 207 terminorum evolutio certe multo minorem operam calculi a LAGRIO subductus, extractione radicis, quo sola insunebat, exclusa. Ex quo totus hic labor vix 18 horarum, nisi divisio per numerum 49 aliquam molestiam crearet.

6. Simili modo loco $\text{Ang. tang } \frac{1}{3}$, si non satis parvus videretur, introducere poterimus, servatoque altero habebimus

$$\text{Ang. tang } \frac{1}{3} = \text{Ang. tang } \frac{1}{7} + \text{Ang. tang } \frac{2}{11}$$

ideoque

$$\frac{\pi}{4} = 2 \text{ Ang. tang } \frac{2}{11} + 3 \text{ Ang. tang } \frac{1}{7}$$

et

$$\pi = + \frac{16}{11} \left(1 - \frac{4}{3 \cdot 121} + \frac{4^2}{5 \cdot 121^2} - \frac{4^3}{7 \cdot 121^3} + \frac{4^4}{9 \cdot 121^4} - \dots \right)$$

$$+ \frac{12}{7} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 49} + \frac{1}{5 \cdot 49^2} - \frac{1}{7 \cdot 49^3} + \frac{1}{9 \cdot 49^4} - \dots \right)$$

Verum etsi hic multo pauciores terminos assumisso sufficiat, diu maiores numeros 49 et 121 omne fere lucrum adinvenire videtur hac transformatio:

$$\text{Ang. tang } \frac{2}{11} = \text{Ang. tang } \frac{1}{7} + \text{Ang. tang } \frac{3}{79},$$

quae praebet

$$\frac{\pi}{4} = 5 \text{ Ang. tang } \frac{1}{7} + 2 \text{ Ang. tang } \frac{3}{79},$$

ter convergat, tamen indoles fractionis $\frac{3}{79}$ laborem non mediocriter adauget, ita ut praestare videatur seriosis longe minus convergentibus uti.

7. Quando autem calculo numerico est consulendum, non solum ad convergentiam serierum, quarum termini in summam colligi debent, respici convenit, sed potissimum ad facilitatem, qua singuli termini per operationes arithmeticas evolvantur; ita, si seriei progressio geometrica sit admixta, calculus facillime expeditur, si huius termini in ratione vel decupla vel centupla vel millicupla decreascent. Quamobrem seriei, qua angulus, cuius tangens est $= \frac{1}{7}$, ac multo magis eius, cuius tangens est $= \frac{3}{79}$, termini non sine ingenti labore evolvuntur, qui forte tantus est, ut quilibet maluerit multo plures terminos serierum pro angulis, quorum tangentes sunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ expedire, nequaquam enim maior convergentia laborem, quem singulorum terminorum postulat evolutio, compensare videtur. Sin autem eiusmodi angulis uti liceret, quorum tangentes essent $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$ etc., nullum est dubium, quin praeter maiorem convergentiam etiam calculus singulorum terminorum mirum in modum sublevaretur.

8. Hunc autem usum egregie praestat alia seriei forma, qua arcum circularem ex data eius tangente exprimere licet. Deduxi autem hanc seriem ex consideratione formulae differentialis

$$\frac{dx}{V(1-xx)}$$

ponendo eius integrale

$$\int \frac{dx}{V(1-xx)} = zV(1-xx).$$

Hinc enim fiet differentiendo

$$dx = dz(1-xx) - xzdx$$

seu

$$\frac{dz}{dx}(1-xx) - xz - 1 = 0.$$

Statuatur nunc

$$z = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \text{etc.}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{xxax}{dx} &= -Axx - 3Bx^3 - 5Cx^5 - 7Dx^7 \\
- xz &= -Axx - Bx^4 - Cx^6 - Dx^8 \\
- 1 &= -1.
\end{aligned}$$

Singulis ergo terminis ad nihilum redigendis invenitur

$$A = 1, \quad B = \frac{2}{3}A, \quad C = \frac{4}{5}B, \quad D = \frac{6}{7}C, \quad E = \frac{8}{9}D$$

ita ut sit

$$\text{Ang. sin } x = x \sqrt{(1 - xx)} \cdot \left(1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}x^4 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}x^6 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}x^8 + \dots\right)$$

9. Sit iam $\frac{m}{n}$ tangens huius anguli, cuius sinus posita

$$x = \frac{\frac{m}{n}}{\sqrt{mm + nn}} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1 - xx)} = \frac{n}{\sqrt{mm + nn}}$$

ita ut irrationalitas iam ex calculo excedat fiatque

$$\text{Ang. tang } \frac{m}{n} = \frac{mn}{mm + nn} \left(1 + \frac{2mn}{3(mm + nn)} + \frac{2 \cdot 4 m^4}{3 \cdot 5 (mm + nn)^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 m^6}{3 \cdot 5 \cdot 7 (mm + nn)^3} + \dots\right)$$

quae series non solum magis convergit quam vulgaris an

$$\text{Ang. tang } \frac{m}{n} = \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m^2}{3n^2} + \frac{m^4}{5n^4} - \frac{m^6}{7n^6} + \frac{m^8}{9n^8} - \dots\right)$$

sed etiam singuli termini fore pari facilitate evolvuntur, multiplicatio per fractiones $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$ etc. non difficilior divisio per numeros 3, 5, 7, 9 etc. Tum vero, in quo m

10. Secundum hanc igitur novam seriem angulos supra exhibitos evol-
vamus atque obtinebimus

$$I. \quad \text{Ang. tang } \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{5^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{5^3} + \text{etc.} \right)$$

$$II. \quad \text{Ang. tang } \frac{1}{3} = \frac{3}{10} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{10^3} + \text{etc.} \right)$$

$$III. \quad \text{Ang. tang } \frac{1}{7} = \frac{7}{50} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{50} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{50^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{50^3} + \text{etc.} \right)$$

$$IV. \quad \text{Ang. tang } \frac{3}{79} = \frac{237}{6250} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{6250} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{9^2}{6250^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{9^3}{6250^3} + \text{etc.} \right),$$

haec series ad calculum arithmeticum manifesto multo magis sunt accommo-
datae quam praecedentes, cum prima exigit continuam divisionem per 5, se-
cunda per 10, tertia per 50 et quarta per 6250, quae ideo est perquam com-
moda quod $\frac{9}{6250} = \frac{144}{100000}$; quam ob causam has series praecedentibus longissime
preferendas esse censeo.

11. Denotet nunc NEWTONIANO in quavis serie littera P terminum quem-
vis praecedentem totum, quo facilius pateat, quibusnam operationibus inde
ei oporteat terminum sequentem, atque prima forma

$$\pi = 4 \text{ Ang. tang } \frac{1}{2} + 4 \text{ Ang. tang } \frac{1}{3}$$

supponit has series:

$$\pi = + \frac{8}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} P + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} P + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{5} P + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{5} P + \text{etc.}$$

$$+ \frac{6}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} P + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10} P + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{10} P + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{10} P + \text{etc.};$$

$$\pi = + \frac{28}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} P + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10} P + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{10} P + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{10} P + \text{etc.};$$

$$+ \frac{56}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{50} P + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{50} P + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{50} P + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{50} P + \text{etc.};$$

at ex tertia

$$\pi = 20 \text{ Ang. tang } \frac{1}{7} + 8 \text{ Ang. tang } \frac{3}{79}$$

prodit

$$\pi = \frac{28}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{50} P + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{50} P + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{50} P + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{50} P$$

$$+ \frac{948}{3125} + \frac{2}{3} \cdot \frac{144}{100000} P + \frac{4}{5} \cdot \frac{144}{100000} P + \frac{6}{7} \cdot \frac{144}{100000} P + \frac{8}{9} \cdot \frac{144}{100000} P$$

In his postremis seriebus prior ita convergit, ut quilibet terminus quinquagies minor praecedente; posterior vero ita, ut quilibet terminus fere septingenties praecedente minor; ex quo hoc commodi assequi non sit opus in terminis primum sequentibus cyphras antecedentes quoniam nullum est periculum, ut in locis decimalibus, ubi quivis incipere debet, fallamur, hincque calculus non mediocriter sublevatur.

12. His perpensis non dubito pronunciare rationem peripheriae metrum seu valorem ipsius π commodissime et promptissime obtineri duabus seriebus:

$$\pi = 2,8 + P \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{100} + P \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{100} + P \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{100} +$$

$$+ 0,30336 + P \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{144}{100000} + P \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{144}{100000} + P \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{144}{100000} +$$

neque enim certe aliae exhiberi possunt series, quo tantopero commodius simulque singuli termini tam facile per calculum arithmeticum evolvantur. Hinc ergo speciminis loco valorem π tantum ad 20 notas decimales et quo calculus certior reddatur, eum ad 22 notas extendam, in singulis terminis finem tantum notabo, ut nota 22^{da} sit ultima, quoniam hinc sponte patet. Prioris ergo seriei terminorum evolutio ita se habebit:

	74666666666666666666	div. per 5
	29866666666666666666	mult. per $\frac{2}{100}$
III.	59733333333333333333	div. per 7
	85333333333333333333	
	51200000000000000000	mult. per $\frac{2}{100}$
IV.	10240000000000000000	div. per 9
	11377777777777777777	
	91022222222222222222	mult. per $\frac{2}{100}$
V.	18204444444444444444	div. per 11
	16549494949494949494	
	16549494949494949494	mult. per $\frac{2}{100}$
VI.	33098989898989898989	div. per 13
	2546076146076	
	30552913752913	mult. per $\frac{2}{100}$
VII.	611058275058	div. per 15
	40737218337	
	570321056721	mult. per $\frac{2}{100}$
VIII.	11406421134	div. per 17
	670965949	
	10735455185	mult. per $\frac{2}{100}$
IX.	214709103	div. per 19
	11300479	
	203408624	mult. per $\frac{2}{100}$
X.	4068172	div. per 21
	193722	
	3874450	mult. per $\frac{2}{100}$
XI.	77489	div. per 23
	3369	
	74120	mult. per $\frac{2}{100}$
XII.	1482	div. per 25
	59	
	1423	mult. per $\frac{2}{100}$
XIII.	28	

in ratione 1:50 decrescentem, unde plures eorum evolvi non

13. Altera autem series sequenti calculo computabitur:

I.	0,303360000000000000000000	div. per 3
	101120000000000000000000	
	202240000000000000000000	mult. per $\frac{11}{100}$
II.	291225600000000000000000	div. per 5
	582451200000000000000000	
	232980180000000000000000	mult. per $\frac{11}{100}$
III.	335491891200000000000000	div. per 7
	479274130285714	
	2875644781714285	mult. per $\frac{11}{100}$
IV.	4140928485668	div. per 9
	460103165074	
	3680825320594	mult. per $\frac{11}{100}$
V.	5300388461	div. per 11
	481853496	
	4818534965	mult. per $\frac{11}{100}$
VI.	6938690	div. per 13
	533745	
	6404945	mult. per $\frac{11}{100}$
VII.	9223	div. per 15
	615	
	8608	mult. per $\frac{11}{100}$
VIII.	12	

Huius ergo seriei pro viginti duabus notis tantum opus est unde $22n$ notae circiter postulabunt evolutionem $8n$ terminorum 128 notis sufficiet evoluisse 47 terminos.

II.	37333333333333333333
III.	59733333333333333333
IV.	102100000000000000
V.	182044444444444444
VI.	3309898989898989
	2,83794109202101010101
VII.	611058275058
VIII.	11406421134
IX.	214709103
X.	4068172
XI.	77489
XII.	1482
XIII.	28
	2,8379410920832784562570

hunc modo addantur terminus alterius seriei

I.	0,30336000000000000000
II.	29122560000000000000
III.	3351918912000000
IV.	4140928485668
V.	5300388461
VI.	6938690
VII.	9223
VIII.	12
	0,3036515615065147822055
prior	2,8379410920832784562570
ϵ	3,1415926535897932384625

si numerus, ubi ultima nota excepta incipit deprehenditur, totusque hic calculi laborum meos circiter horae consumsit; ex quo intelligere licet, si quis totum laborem, quantum lacrimis impendere velit, cum valore peripheriarum facile ad 2000 figuras decimales esse extensurum.

semel observatis hos terminos quosque habuerit taciturnitas
ita prioris seriei termini priores omissis in quoque cyphra
modo procedent, ubi notas periodicas deinceps continuo
inclusi:

- I. 2,800 etc.
- II. 37333 etc.
- III. 597333 etc.
- IV. 102400 etc.
- V. 1820444 etc.
- VI. 330(98)(98) etc.
- VII. 611(058275)(058275) etc.
- VIII. 11406(421134)(421134) etc.
- IX. 21470(910370675076557429498605969194204488322

Seriei autem posterioris termini priores in infinitum continui

- I. 0,3033600 etc.
- II. 291225600 etc.
- III. 335491891200 etc.
- IV. 414092848566(857142)(857142) etc.
- V. 53003884616557(714285)(714285) etc.
- VI. 693869034980391(896103)(896103) etc.
- VII. 92231207111239784(343656)(343656) etc.
- VIII. 123958742357506270157(874125) etc.

16. Colligamus nunc octo priores terminos in infinitum
unam summam, ut ea statim qui calculum ulterius conti-
neat, et pariter revolutiones periodicas in utraque summa

SUMMA 8 PRIORUM TERMINORUM SERIEI PRIORIS

I.	2,80
II.	37333333333333 3333333333
III.	597333333333 3333333333
IV.	102400000000 0000000000
V.	1820444444 4444444444
VI.	33098989 8989898989
	<hr/> 2,8379410920210101 0101010101
VII.	611058 27505827505
VIII.	11406 42113442113
	<hr/> 2,8379410920832565 70629370629
scilicet	2,8379410920832565 (706293) (706293) etc.

PRO POSTERIORE SERIE¹⁾

I.	0,30336
II.	2912256
III.	3354918912
IV.	414092848566857142 etc.
	<hr/> 0,303651561505984018566857142857142857142 etc.
V.	530038846165577142857142857
	<hr/> 0,30365156150651408741302272000000000000
VI.	693869034980391 (89610 3) (89610 3) (89610 3) (89610 3)
VII.	922312071112 39784 (3 43656) (3 43656) (3 43656) (3
VIII.	1239587423 57506 2 70157 (8 74125) (8 74125) (8
	<hr/> 694792586638927 86901 0 03424 (6 07392) (6 07392) (6
	<hr/> 0,303651561506514087413022720000 00000 0 00000 0 00000 0 00000 0
	<hr/> 0,303651561506514782205609358927 86901 0 03424 (6 07392) (6 07392) (6

1) In editione principis termini octavi nota decima tertia, quae est 5, per errorem omissa. Cum hic error in sequentes calculos irrepisset, pro summa octo priorum terminorum isto valor sortus erat.

0,3036515615065147822056093589278645743484 (547452) etc.,

cui notae 33^{ma} et sequentes falsae sunt. Corroxit G. B.

at terminus sequens nonus sub nota denum vigesima quarte,
cipit, unde facile accuratiores approximationes indagare licet.

17. In evolutione quidem terminorum ulteriorum divisio
numeros impares moram facessere potest, ita ut ad has opo
maius tempus sit impendendum, quam supra ad minores spe
aestimavi. Verumtamen haec difficultas in serie vulgari ex au
multo est maior, propterea quod ob plures terminos evolvend
ribus divisoribus opus est conficiendum, praeterquam quod, a
operatio suscipi queat, tam taediosam radiceis extractionem a
Quam ob causam dubium plane nullum superesse potest, quin
binis novis seriebus utens longe facilius et promptius rationem
diametrum pro quovis praecisionis gradu definire queat, qua
more consueto institueret; et quantumvis temporis spatium in
insumere cogatur, certum est more solito tempus plus quam dupl

18. Ceterum observasse adhuc iuvabit seriem hic pro arc
traditam etiam directe ex serie consueta

$$s = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 - \dots$$

ut s sit arcus cuius tangens $= t$, elici posse; cum enim sit

$$tts = t^3 - \frac{1}{3} t^5 + \frac{1}{5} t^7 - \frac{1}{7} t^9 + \dots$$

erit addendo

$$(1 + tt)s = t + \frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{3 \cdot 5} t^5 + \frac{2}{5 \cdot 7} t^7 - \frac{2}{7 \cdot 9} t^9 + \dots$$

Porro

$$tt(1 + tt)s = t^3 + \frac{2}{3} t^5 - \frac{2}{3 \cdot 5} t^7 + \frac{2}{5 \cdot 7} t^9 - \dots$$

$$t^3)s = t(1+t)^2 + \frac{2}{3}t^3(1+t) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}t^5 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}t^7 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}t^9 + \text{etc.}^1)$$

$$t^4)s = t(1+t)^3 + \frac{2}{3}t^3(1+t)^2 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}t^5(1+t) + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}t^7 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}t^9 - \text{etc.}$$

e continuo progrediendo evidens est hinc obtineri

$$s = \frac{t}{1+t} + \frac{2}{3} \cdot \frac{t^3}{(1+t)^2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{t^5}{(1+t)^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{t^7}{(1+t)^4} + \text{etc.}$$

$$s = \frac{t}{1+t} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{1+t} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{t^2}{(1+t)^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{t^3}{(1+t)^3} + \text{etc.} \right),$$

series ponendo $t = \frac{m}{n}$ cum ante exhibita congruit.

19. Quoniam series prioris terminum nonum exhibui, cuius revolutiones adicæ 48 figuras comploctuntur, series quoque posterioris terminum nonum subiungam²⁾

16800055434805555673161

(293294940353763883175647881530234471410941999177)(293 etc.

23 cyphrae sunt praefigendae, antequam ad comma, partes decimales a integrorum separans, perveniatur, ita ut prima huius termini periodus

1) In editione principio coefficientis potestatis t^0 indicatur $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9}$. Corroxit C. B.

2) Huius fractionis notae undecima, decima secunda et decima tertia, quae sunt 480, in no principio exhibitae sunt ut sequitur: 602. Hic et in formulis sequentibus corroxit C. B.

in loco nonagesimo quarto terminetur. Si loco notarum periodice fractionem ordinariam adicere, hic terminus nonus ita finite ex

$$\text{IX.} \quad 16800055434805555673161 \frac{713}{2431} \left[= \frac{9}{11} - \frac{3}{13} - \frac{5}{17} \right]$$

Simili autem modo prioris seriei terminus nonus expressus est¹⁾

$$21470 \frac{19918}{21879}.$$

Deinde summas octo terminorum supra exhibitae ita repraesenta

$$1) \text{ Editio princeps: } 21470 \frac{21002}{21879} \quad \text{Corroxit C. B.}$$

2) Editio princeps:

PRIORIS SERIEI

$$\text{Summa I ... VIII} \quad 2,8379410920832565 \quad \frac{101}{143} \left[= \frac{1}{11} + \frac{8}{13} \right]$$

$$\text{terminus IX} \quad 21470 \frac{21002}{21879} \left[= \frac{5}{9} + \frac{4}{11} - \frac{2}{13} \right]$$

$$\text{summa I ... IX} \quad 2,837941092083278041 \frac{12893}{21879}$$

POSTERIORIS SERIEI

$$\text{I ... VIII} \quad 0,3036515615065147822056093589278645743484 \frac{648}{1001}$$

$$\text{IX} \quad 16800055435025555673161$$

$$\text{I ... IX} \quad 0,3036515615065147822056110389334080769040220613$$

$$\text{ubi notetur esse} \quad \frac{14307}{17017} = \frac{8}{7} + \frac{1}{11} + \frac{8}{13} - \frac{5}{17},$$

unde huius fractionis evolutio est in promptu. Pariquo modo est prior fractio

$$\frac{12893}{21879} = \frac{5}{9} + \frac{5}{11} - \frac{7}{13} + \frac{2}{17}.$$

Corroxit

PRIORIS SERIEI

Summa I . . . VIII	2,837941092083256570	$\frac{90}{143} \left[= \frac{1}{11} + \frac{7}{13} \right]$
terminus IX	21470	$\frac{19918}{21879} \left[= \frac{1}{9} + \frac{7}{11} - \frac{4}{13} + \frac{8}{17} \right]$
summa I IX	2,837941092083278041	$\frac{11809}{21879} \left[= \frac{1}{9} + \frac{8}{11} + \frac{3}{13} + \frac{8}{17} \right]$

POSTERIORIS SERIEI

summa I . . . VIII	0,3036515615065147822056093589278690100342460739	$\frac{261}{1001}$
terminus IX	16800055434805555673161	$\frac{713}{2431}$
summa I IX	0,3036515615065147822056110389334124905898133900	$\frac{9428}{17017}$
ubi notatur esse	$\frac{261}{1001} = \frac{3}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13}$	
	$\frac{713}{2431} = \frac{9}{11} - \frac{3}{13} - \frac{5}{17}$	
	$\frac{9428}{17017} = \frac{3}{7} + \frac{8}{11} - \frac{4}{13} - \frac{5}{17}$	

ENODATIO INSIGNIS CUIUSDAM PARADOXI CIRCA MULTIPLICATIONEM ANGULORUM OBSERVATI¹⁾

Commentatio 810 indicis ENESTROEMIANI

Opera postuma 1, 1862, p. 299—314

1. Singularis est proprietas formularum, quibus cosinus angulorum per cosinum anguli simpli exprimuntur. Si enim anguli cosinus ponatur $= x$, angulorum multiplo-
 rum cosinus ita se habent

$$\cos. 0\varphi = 1$$

$$\cos. 1\varphi = x$$

$$\cos. 2\varphi = 2xx - 1$$

$$\cos. 3\varphi = 4x^3 - 3x$$

$$\cos. 4\varphi = 8x^4 - 8xx + 1$$

$$\cos. 5\varphi = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$\cos. 6\varphi = 32x^6 - 48x^4 + 18xx - 1$$

$$\cos. 7\varphi = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$\cos. 8\varphi = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32xx + 1$$

etc.,

1) Confer hac cum dissertatione praeter huius voluminis partis primae Comm.
 703, 704, 747 indicis ENESTROEMIANI etiam Commentationem 247 voluminis II et
 ad paginas 542 et 543 adiectas. C. B.

seu

$$\cos. n\varphi = 2^{n-1} x^n \left(1 - \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} \right. \\ \left. + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-8} - \text{etc.} \right),$$

ubi ratio progressionis facile perspicitur.

2. Neque vero hinc concludere licet hanc seriem eadem lege in infinitum continuatam cosinum anguli $n\varphi$ exprimere, ita ut istius seriei infinitae summa futura sit $= \cos. n\varphi$; sed quoties n est numerus integer, seriem consue tum continuari oportet, donec ad exponentes negativos ipsius x perveniamus quippe qui termini omnes sunt reiiciendi iis solis ab initio seriei terminis retentis, qui constant potestatibus positivis ipsius x , et numero absoluto, si n sit numerus par, est vel $+1$ vel -1 . Nisi haec cautela observetur errorum delabimur, quia etiam casu $n = 0$ expressio generalis veritati adhaerens satur; prodit enim $2^{-1} x^0 = \frac{1}{2}$, cum tamen sit $\cos. 0\varphi = 1$, quod certe insensum est paradoxon.

3. Quo clarius etiam in reliquis casibus falsitas formae generalis perspicatur, ponamus $n = 1$, et haec forma evadet:

$$x \left(1 - \frac{1}{4} x^{-2} - \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-8} - \frac{1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20} x^{-10} - \text{etc.} \right)$$

quae cum sit $< x$, cum veritate certe consistere nequit. Ut autem huius seriei valor verus exploretur, ea ad hanc formam reducta:

$$x \left(1 - \frac{1}{4} x^{-2} - \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 4} x^{-4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 6} x^{-6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^{-8} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} x^{-10} - \text{etc.} \right)$$

Cum iam sit

$$(1 - x^{-2})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^{-4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^{-6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^{-8} - \dots$$

nostra series hac finita forma continetur:

$$x - \frac{1}{2}x \left(1 - (1 - x^{-2})^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \sqrt{1 - \frac{1}{xx}} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{xx}}$$

ita ut casu $n = 1$ seriei nostrae generalis summa futura sit $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{xx}}$ cum tamen sit $\cos. 1\varphi = x$. Quin etiam, cum sit $x < 1$, patet seriem continuatam summam adeo fore imaginariam.

4. Idem etiam de quolibet alio valore ipsius n ostendi potest; magis mirandum est expressionem nostram generalem, si iusta adhibeatur, ut omnes termini exponentes negativos ipsius x habita-
tur, veritati esse consentaneam et valorem ipsius $\cos. n\varphi$ praebere; omni extensione sumpta et in infinitum continuata longe aliam imaginariam summam sortiatur; cuiusmodi singulare phaenomenon in aliis analyseos partibus iam sit observatum. Praeterea vero non haud minus est mirandum, notari convenit limitatione quoque illa ut potestates negativae ipsius x reiiciantur, veritatem non oblinere numerus positivus integer; si enim n esset numerus negativus, potestates ipsius x prodeuntes negativae, error foret manifestissimus $\cos. (-n\varphi) = \cos. n\varphi$.

5. Sin autem pro n accipiatur numerus positivus quidem nullo modo inde veritatem elicere licet. Sit enim $n = \frac{1}{2}$, et expressio generalis hanc induct formam:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{8}x^{-2} - \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 16}x^{-4} - \frac{1 \cdot 7 \cdot 9}{8 \cdot 16 \cdot 24}x^{-6} - \frac{1 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32}x^{-8} - \dots \right)$$

inde etiamsi termini negativae potestates ipsius x complexuri, omnes scilicet praeter primum, expungantur, tamen neutiquam inde obtinetur $\cos. \frac{1}{2} \varphi$ quippe cum sit

$$\cos. \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Multominus autem reliquis terminis admissis veritati consulitur, dum serie prodit formulae $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ minime aequalis.

6. Hinc igitur abunde liquet, quid de forma illa canonica

$$\begin{aligned} \cos. n\varphi = 2^{n-1} x^n & \left(1 - \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} \right. \\ & \left. + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-8} - \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

apud plurimos auctores mirifice laudata sit iudicandum. Ea scilicet veritas nunquam est consentanea, nisi haec restrictiones adhibeantur: primo, ut n sit numerus integer positivus, ubi quidem etiam cyphra est excludenda; deinde ut termini, in quibus exponens potestatis x sit negativus, penitus extinguantur. Qui huic formulae plus tribuunt, eamque adeo ad casus, quibus n est numerus negativus vel fractus, extendere volunt, maxime decipiuntur et in gravissimos errores illabuntur. Quae cum sint adeo manifesta, mirandum non videtur, quod istae tam necessariae cautelae, quantum equidem memini, nemine sint animadversae.

7. Haec consideratio occasionem mihi praebet duplicem investigationem suscipiendi. Primo scilicet in veram summam nostrae expressionis generalis siquidem in infinitum continetur, sum inquisiturus, ut pateat, quantum in quovis casu a valore $\cos. n\varphi$ discrepet. Deinde similem expressionem generalem investigabo, quae revera valorem $\cos. n\varphi$ exhibeat et nulla restrictione adhibita veros cosinus angulorum multiplo- rum ipsius φ praebet, ita ut si in singulis casibus, quibus n est numerus integer, formulae initio allatae prodeant simulque veritas, quando n est numerus fractus vel negativus, obtineatur.

$$s = A(x + V(xx - 1))^n$$

valorem ipsius s per seriem evoluturus, quae secundum potestatem procedat. Cum igitur sit

$$V(xx - 1) = x - \frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4x^3} - \text{etc.},$$

ob

$$s = A\left(2x - \frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4x^3} - \text{etc.}\right)^n$$

observo terminum primum futurum esse $= 2^n A x^n$, in sequentibus ponentes potestatis x continuo binario decrescere, ita ut series habitura sit formam

$$s = \alpha x^n + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-4} + \delta x^{n-6} + \epsilon x^{n-8} + \text{etc.},$$

ubi quidem est $\alpha = 2^n A$.

9. Ad hanc autem seriem commodissimo eruendam observo ne assumptam per differentiationem in aliam converti oportere, in potestas indefinita quam omnis irrationalitas absit simulque quantitas plus una dimensione non sit habitura; huiusmodi enim aequationes per seriem certa lege procedentem resolvitur. Hunc in finem primis sumendis obtineo

$$ls = lA + nl(x + V(xx - 1));$$

tum vero differentiendo:

$$\frac{ds}{s} = \left(n dx + \frac{nx dx}{V(xx - 1)} \right) : (x + V(xx - 1)) = \frac{n dx}{V(xx - 1)}.$$

Hic sumtis quadratis erit

$$\frac{ds^2}{ss} = \frac{nn dx^2}{xx - 1}$$

seu

$$(xx - 1)ds^2 = nnssdx^2,$$

ae aequatio denuo differentiata sumto elemento dx constante et per $2d$ isa dat

$$(xx-1)dds + xdx ds = nnsdx^2,$$

ae iam formam habet desideratam, ita ut quantitas s nusquam plus un dimensione habeat et quantitas x ab omni irrationalitate sit immunis.

10. Quia hic quantitas x in aliis terminis duas, in uno vero nullam tene dimensionem, facta huiusmodi distinctione, ut sit

$$xxdds + xdx ds - nnsdx^2 - dds = 0,$$

namus

$$s = \alpha x^m + \beta x^{m-2} + \gamma x^{m-4} + \dots + \mu x^{m-i} + \nu x^{m-i-2} + \text{etc.}$$

facta substitutione potestas x^{m-i-2} talem accipiet coefficientem:

$$\nu((m-i-2)(m-i-3) + m-i-2 - nn) - \mu(m-i)(m-i-1),$$

cum evanescere debeat, quantitas ν ex μ ita definitur, ut sit

$$\nu = \frac{(m-i)(m-i-1)}{(m-i-2)^2 - nn} \mu.$$

tuatur iam pro initio $i = -2$, ut fiat $\nu = \alpha$ et $\mu = 0$, proditque

$$\alpha = \frac{(m+2)(m+1)}{mm - nn} 0,$$

o littera ut maneat indefinita, esse oportet $mm = nn$ ideoque vel $m = n$ vel $m = -n$.

11. Nostro autem casu est, ut supra vidimus, $m = n$ atque $\alpha = 2^m A$ proposito

$$s = \alpha x^n + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-4} + \dots + \mu x^{n-i} + \nu x^{n-i-2} + \text{etc.}$$

$$\nu = \frac{(n-i)(n-i-1)}{(n-i-2)^2 - nn} \mu = -\frac{(n-i)(n-i-1)}{(i+2)(2n-i-2)} \mu,$$

$$\gamma = -\frac{(n-2)(n-3)}{8(n-2)}\beta = -\frac{n(n-3)}{4 \cdot 8}\alpha,$$

$$\delta = -\frac{(n-4)(n-5)}{12(n-3)}\gamma = -\frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12}\alpha,$$

$$\epsilon = -\frac{(n-6)(n-7)}{16(n-4)}\delta = +\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}\alpha$$

etc.

12. Posito ergo

$$s = A(x + \sqrt{xx-1})^n$$

ob $\alpha = 2^n A$ habebimus hanc seriem, qua quantitas s exprimitur

$$s = 2^n A x^n \left(1 - \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} \right. \\ \left. + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-8} - \text{etc.} \right)$$

Quare si pro A capiatur $\frac{1}{2}$, orietur ipsa illa forma, quam ini assignavimus existente $x = \cos. \varphi$, atque nunc quidam patet illi in infinitum continuatae verum valorem esse

$$\frac{1}{2}(x + \sqrt{xx-1})^n;$$

sicque ratio aberrationis a valore $\cos. n\varphi$ est manifesta, atque evidens est, cur sumto $n=0$ prodeat summa nostrae seriei vero casibus summa fiat imaginaria, si quidem sit $x < 1$.

$x=1$, quicumque numerus pro n accipiat, summa semper os propterea

$$1 = 2^n \left(1 - \frac{n}{4} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} - \text{etc.} \right)$$

quod certe est theorema non inelegans.

$$\sqrt{xx-1} = \sqrt{-1} \cdot \sin. \varphi$$

et ex notis sinuum proprietatibus

$$(\cos. \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. \varphi)^n = \cos. n\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi.$$

Quare posito $\cos. \varphi = x$ erit

$$\begin{aligned} & \cos. n\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi \\ &= 2^n x^n \left(1 - \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} + \text{etc.} \right), \end{aligned}$$

unde patet summam huius seriei in infinitum continuatae esse imaginariam nisi sit $x = 1$ seu $\varphi = 0$. Realis quidem semper erit, dum sit $x > 1$; sed hi casibus non amplius ad sinus et cosinus referri potest. Veluti si $xx = 2$, o-

$$s = A(1 + \sqrt{2})^n$$

erit

$$(\sqrt{2}+1)^n = 2^{\frac{3n}{2}} \left(1 - \frac{n}{8} + \frac{n(n-3)}{8 \cdot 16} - \frac{n(n-4)(n-5)}{8 \cdot 16 \cdot 24} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32} - \text{etc.} \right)$$

At si ponamus

$$x + \sqrt{xx-1} = y,$$

fit

$$x = \frac{yy+1}{2y},$$

unde obtinetur sequens summatio non contemnenda:

$$\left(\frac{yy+1}{yy-1} \right)^n = 1 - \frac{n}{1} \cdot \frac{yy}{(yy+1)^2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y^4}{(yy+1)^4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y^6}{(yy+1)^6} + \text{etc.}$$

quae cum etiam vera sit sumto n negativo, erit

$$\left(\frac{yy+1}{yy} \right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{yy}{(yy+1)^2} + \frac{n(n+3)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y^4}{(yy+1)^4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y^6}{(yy+1)^6} + \text{etc.}$$

ubi pro n omnes numeros assumere licet.

14. Hinc etiam alteri requisito satisfacere poterimus, quo pressio infinita desideratur quantitatem $\cos. n\varphi$ sine ulla restrictione. Sumatur enim exponents n negativo, et cum sit

$$\cos. (-n\varphi) = \cos. n\varphi$$

et

$$\sin. (-n\varphi) = -\sin. n\varphi,$$

erit ex superiori forma

$$\begin{aligned} \cos. n\varphi &= \sqrt{1 - \sin. n\varphi} \\ &= \frac{1}{2^n x^n} \left(1 + \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} x^{-4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} + \dots \right) \end{aligned}$$

addendis his formulis pars imaginaria tollitur et summae semis

$$\begin{aligned} \cos. n\varphi &= + 2^{n-1} x^n \left(1 - \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{2^{n+1} x^n} \left(1 + \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} x^{-4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} + \dots \right) \end{aligned}$$

Hae scilicet binae series coniunctae verum valorem ipsius $\cos. \varphi = x$ exprimunt idque sine ulla restrictione, ita ut pro n o tam negativos quam positivos, tam integros quam fractos as
Ubi quidem per se est perspicuum, sive ipsi n tribuatur valor
cunque sive idem positivus, easdem binas series ordine mutato

$$\cos. 0\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Reliquos igitur casus simpliciores **evolvamus**:

I. Sit $n = 1$ eritque

$$\begin{aligned} \cos. \varphi = x \left(1 - \frac{1}{4} x^{-2} - \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-8} - \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{4x} \left(1 + \frac{1}{4} x^{-2} + \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 8} x^{-4} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} + \frac{1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-8} + \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

ubi potestates negativae ipsius x sponte se destruunt, uti ex sequente representatione fit perspicuum:

$$\begin{aligned} \cos. \varphi = x - \frac{1}{4} x^{-1} - \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 8} x^{-3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-5} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-7} - \text{etc.} \\ + \frac{1}{4} x^{-1} + \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 4} x^{-3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 8} x^{-5} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-7} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

ita ut sit

$$\cos. \varphi = x.$$

II. Sit $n = 2$ eritque

$$\begin{aligned} \cos. 2\varphi = 2xx \left(1 - \frac{2}{4} x^{-2} - \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-8} - \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{8xx} \left(1 + \frac{2}{4} x^{-2} + \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 8} x^{-4} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} + \frac{2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-8} + \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

quae binae series ita ordinato exhibeantur:

$$\begin{aligned} \cos. 2\varphi = 2xx - 1 - 2 \cdot \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 8} x^{-2} - 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-4} - 2 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-6} - \text{etc.} \\ + \frac{1}{8} x^{-2} + \frac{1 \cdot 2}{8 \cdot 4} x^{-4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{8 \cdot 4 \cdot 8} x^{-6} + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{16} x^3 \left(1 + \frac{3}{4} x^{-2} + \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 8} x^{-4} + \frac{3 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} + \frac{3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-8} \right)$$

qui termini hoc modo in ordinem redigantur:

$$\begin{aligned} \cos. 3\varphi = 4x^3 - 3x - 0x^{-1} - 4 \cdot \frac{3 \cdot 1 \cdot 2}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-3} - 4 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-5} \\ + \frac{1}{16} x^{-7} + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} x^{-9} \end{aligned}$$

hincque

$$\cos. 3\varphi = 4x^3 - 3x.$$

16. His autem exemplis casu evenire videtur, ut potestates mutuo tollant, neque id pro terminis ulterioribus patet. Quamobrem dubium relinquatur, firma demonstratione evincendum est singulas negativas ipsius x in utraque serio paribus coefficientibus signisque esse affectas, ita ut certum sit omnes se mutuo destrueri. Huiusmodi utriusque seriei terminum generalem contemplemur ac prioris quoque ita representatae

$$\begin{aligned} 2^{n-1} x^n \left(1 - \frac{n}{4} x^{-2} - \frac{n(3-n)}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{n(4-n)(5-n)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} \right. \\ \left. - \frac{n(5-n)(6-n)(7-n)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^{-8} - \dots \right) \end{aligned}$$

terminus generalis colligitur fore

$$- 2^{n-1} x^{n-2\alpha} \cdot \frac{n(\alpha+1-n)(\alpha+2-n)(\alpha+3-n) \dots (2\alpha-1-n)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \dots \cdot 4\alpha}$$

ita, ut potestatis $x^{n-2\alpha}$ coefficientis sit

$$-2^{n-1} \cdot \frac{n(\alpha+1-n)(\alpha+2-n)(\alpha+3-n) \cdots (2\alpha-1-n)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdots 4\alpha}.$$

Quando ergo haec potestas est negativa seu $2\alpha > n$, patet hunc terminum evanescere his casibus:

$$2\alpha = n+1, \quad 2\alpha = n+2, \quad 2\alpha = n+3 \quad \text{usque ad} \quad 2\alpha = 2n-2,$$

si quidem α fuerit numerus integer. Unde in priori serie omnium potestatum negativarum coefficientes sponte evanescent, nisi sit $2\alpha > 2n-2$ seu $\alpha > n-1$ quocirca docendum restat, si fuerit $\alpha > n-1$, istas potestates negativas alteram seriem destrui, ita ut solae potestates positivae ipsius x relinquantur.

17. Alterius autem seriei, quae ita se habet:

$$\frac{1}{2^{n+1}x^n} \left(1 + \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(3+n)}{4 \cdot 8}x^{-4} + \frac{n(4+n)(5+n)}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^{-6} \right. \\ \left. + \frac{n(5+n)(6+n)(7+n)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^{-8} + \text{etc.} \right),$$

terminus generalis colligitur

$$\frac{x^{-n-2\beta}}{2^{n+1}} \cdot \frac{n(\beta+1+n)(\beta+2+n)(\beta+3+n) \cdots (2\beta-1+n)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdots 4\beta},$$

unde potestatis negativae $x^{-n-2\beta}$ coefficientis est

$$2^{-n-1} \cdot \frac{n(\beta+1+n)(\beta+2+n)(\beta+3+n) \cdots (2\beta-1+n)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdots 4\beta}.$$

Statuatur iam haec potestas praecedenti $x^{n-2\alpha}$ aequalis, seu $n-2\alpha = -n-2\beta$ sitque $\alpha = n+\beta$; sicque ipsae illae potestates negativae maiores prodibunt quarum coefficientes in priori serie non sponte evanescent. Ostendi oportet harum potestatum coefficientes ex utraque serie ortos inter se aequales et se mutuo destruere, ubi quidem iam sponte patet alterum positivum alterum negativum, ex quo utriusque aequalitas demonstrari d

18. Cum sit $\alpha = n + \beta$, erit $n = \alpha - \beta$, adeoque adnumerandum

$$2^{n-\beta-1} \cdot \frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3) \cdots (\alpha+\beta-1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdots 4\alpha} \\ = 2^{n-\alpha-1} \cdot \frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \cdots (\alpha+\beta-1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdots 4\beta},$$

seu utrinque per $2^{n+\beta+1}$ multiplicando

$$2^{2n} \cdot \frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3) \cdots (\alpha+\beta-1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdots 4\alpha} = 2^{2n} \cdot \frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \cdots (\alpha+\beta-1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdots 4\beta}$$

Cum iam in priori forma factorum denominatoris numerus sit $= \alpha$ per quaternarium sint divisibiles, hos factores ita repraesentare liceat

$$4^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha = 2^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha;$$

simili modo denominator alterius formae ita exprimi poterit:

$$4^\beta \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \beta = 2^{2\beta} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \beta,$$

unde haec aequalitas ostendenda superest

$$\frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3) \cdots (\alpha+\beta-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \alpha} = \frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \cdots (\alpha+\beta-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \beta}$$

quae per crucem multiplicata manifesto utrinque praebet idem pro-

$$n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (\alpha + \beta - 1).$$

19. Paradoxon ergo initio propositum satis distincte explicatum simulque ratio patet, cur haec aequatio:

$$\cos. n\varphi = 2^{n-1} x^n \left(1 - \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} + \right.$$

tum demum sit veritati consentanea, quando n denotat numerum positivum simulque omnes potestates ipsius x exponentes negativos expungantur, et cur his restrictionibus non observatis haec expressio praecipitet.

$$p = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{8}x^{-3} - \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 16}x^{-4} - \frac{1 \cdot 7 \cdot 9}{8 \cdot 16 \cdot 24}x^{-6} - \frac{1 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32}x^{-8} - \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{2\sqrt{2}x} \left(1 + \frac{1}{8}x^{-2} + \frac{1 \cdot 7}{8 \cdot 16}x^{-4} + \frac{1 \cdot 9 \cdot 11}{8 \cdot 16 \cdot 24}x^{-6} + \frac{1 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32}x^{-8} + \text{etc.} \right),$$

in ordinem secundum potestates redacta dat

$$\frac{1}{2} p = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8xx} + \frac{1}{2 \cdot 8x^3} - \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 16x^4} + \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 8 \cdot 16x^5} - \frac{1 \cdot 7 \cdot 9}{8 \cdot 16 \cdot 24x^6} \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 24x^7} - \text{etc.} \right),$$

quilibet coëfficiens per præcedentem dividatur, hæc resultat series:

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{5}{8}, \quad -\frac{7}{10}, \quad -\frac{9}{12}, \quad -\frac{11}{14} \quad \text{etc.},$$

ut

$$\text{et } \frac{1}{2} p = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^{-2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^{-3} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^{-4} + \text{etc.} \right)$$

manifesto habebitur

$$\cos. \frac{1}{2} p = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \frac{x}{2}},$$

stat.

. Evolvamus etiam casum $n = \frac{1}{3}$, ac reperimus

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{4}} \left(1 - \frac{1}{12}x^{-3} - \frac{1 \cdot 8}{12 \cdot 24}x^{-4} - \frac{1 \cdot 11 \cdot 14}{12 \cdot 24 \cdot 36}x^{-6} - \frac{1 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 20}{12 \cdot 24 \cdot 36 \cdot 48}x^{-8} - \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}x} \left(1 + \frac{1}{12}x^{-3} + \frac{1 \cdot 10}{12 \cdot 24}x^{-4} + \frac{1 \cdot 13 \cdot 16}{12 \cdot 24 \cdot 36}x^{-6} + \frac{1 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22}{12 \cdot 24 \cdot 36 \cdot 48}x^{-8} + \text{etc.} \right),$$

quae binae series ita coniungantur.

$$\begin{aligned}\cos. \frac{1}{3} \varphi = \frac{1}{1} x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{16} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{12} x^{-\frac{5}{3}} \\ + \frac{1}{12 \cdot 16} x^{-\frac{7}{3}} - \frac{1 \cdot 8}{12 \cdot 24} x^{-\frac{11}{3}} + \frac{1 \cdot 10}{12 \cdot 24} x^{-\frac{13}{3}} - \dots\end{aligned}$$

Iam ad irrationalitatem tollendam statuatur $x^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{4}}$ seu $x = 4y^3$, a

$$\begin{aligned}\cos. \frac{1}{3} \varphi = y + \frac{1}{4} y - \frac{1}{12 \cdot 4^3} y^5 + \frac{1}{12 \cdot 4^3} y^7 - \frac{1 \cdot 8}{12 \cdot 24 \cdot 4^3} y^{11} \\ + \frac{1 \cdot 10}{12 \cdot 24 \cdot 4^3} y^{13} - \frac{1 \cdot 11 \cdot 14}{12 \cdot 24 \cdot 36 \cdot 4^3} y^{17} + \dots\end{aligned}$$

Sit porro $y = \frac{z}{2}$, erit

$$\begin{aligned}\cos. \frac{1}{3} \varphi = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6z^5} + \frac{1}{6z^7} - \frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 6} z^{11} \\ + \frac{1 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 6} z^{13} - \frac{1 \cdot 11 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9} z^{17} + \frac{1 \cdot 13 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9} z^{19} - \dots\end{aligned}$$

seu

$$\begin{aligned}2 \cos. \frac{1}{3} \varphi = z + \frac{1}{z} - \frac{1}{3z^5} + \frac{1}{3z^7} - \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 6} z^{11} \\ + \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 6} z^{13} - \frac{1 \cdot 11 \cdot 14}{3 \cdot 6 \cdot 9} z^{17} + \frac{1 \cdot 13 \cdot 16}{3 \cdot 6 \cdot 9} z^{19} - \dots\end{aligned}$$

22. In genere autem casus $x = \frac{1}{2}$, unde fit $\varphi = 60^\circ$ seu $\varphi = \frac{1}{3}$ tante π semicircumferentiam circuli, cuius radius = 1, omni attentio videtur. Nam, ob $2x = 1$, fit

$$\begin{aligned}\cos. \frac{n}{3} \pi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n+3)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right) \right)\end{aligned}$$

ubi notari convenit utriusque seriei summam seorsim sumtam essetiam, et quia utraque est divergens, minime licet eas pro lubitu Veluti si termini ordinato coniungerentur, prodiret

$$\cos. \frac{n}{3} \pi = 1 + \frac{nn}{1 \cdot 2} + \frac{9nn}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{nn(nn+107)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.},$$

sequeretur fore $\cos. \frac{n}{3} \pi > 1$, quod tamen est absurdum. Interim tamen summa illarum prioris summa est

$$\frac{1}{2} \left(\cos. \frac{n}{3} \pi + \sqrt{-1} \cdot \sin. \frac{n}{3} \pi \right),$$

prioris vero

$$\frac{1}{2} \left(\cos. \frac{n}{3} \pi - \sqrt{-1} \cdot \sin. \frac{n}{3} \pi \right),$$

ne nullum est dubium, quin ambae coniunctim praebant $\cos. \frac{n}{3} \pi$, etiamsi pateant, quemadmodum hic valor ex coniunctione facta elici possit. Hinc denuo insigne paradoxon resultat, cuius explicatio haud parum arduatur; sine dubio autem ex serierum divergentia est petenda et series signis variantibus ita scribenda terminorum numero neque pari neque impari stato

$$\cos. \frac{n}{3} \pi = 2 - \frac{n}{1} + \frac{n}{1} - \frac{n(3-n)}{1 \cdot 2} + \frac{n(3+n)}{1 \cdot 2} - \frac{n(4-n)(5-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(4+n)(5+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \text{etc.},$$

ut sit

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cos. \frac{n}{3} \pi}{n} = \frac{3-n}{1 \cdot 2} - \frac{3+n}{1 \cdot 2} + \frac{(4-n)(5-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(4+n)(5+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(5-n)(6-n)(7-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{etc.}$$

commoda autem effugere non licet, nisi quantitas x indefinita relinquatur seriei termini secundum eius potestates disponantur.

23. Verum etiam hoc modo haud leves difficultates relinquuntur; si enim terminorum n sumamus infinite parvum, ut sit $\cos. n\varphi = 1 - \frac{1}{2} nn\varphi\varphi$, ob

$$2^n x^n = 1 + n l 2x + \frac{1}{2} nn(l 2x)^2$$

$$\frac{1}{2^n x^n} = 1 - n l 2x + \frac{1}{2} nn(l 2x)^2$$

habebimus, in singulis terminis potestates ipsius n quadrato altiores negligendi

$$2 - nn\varphi\varphi = + \left(1 + nl2x + \frac{1}{2} nn(l2x)^2\right) \times$$

$$\left(1 - \frac{n}{4xx} - \frac{3n - nn}{4 \cdot 8x^4} - \frac{20n - 9nn}{4 \cdot 8 \cdot 12x^6} - \frac{210n - 107nn}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16x^8} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \left(1 - nl2x + \frac{1}{2} nn(l2x)^2\right) \times$$

$$\left(1 + \frac{n}{4xx} + \frac{3n + nn}{4 \cdot 8x^4} + \frac{20n + 9nn}{4 \cdot 8 \cdot 12x^6} + \frac{210n + 107nn}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16x^8} + \text{etc.}\right)$$

Atque facta evolutione tam partes finitae quam infinito parvae ipso numero n affectae se mutuo destruunt, reliquae vero per nn divisae praebent

$$\begin{aligned} \varphi\varphi &= 2l2x \left(\frac{1}{4xx} + \frac{3}{4 \cdot 8x^4} + \frac{20}{4 \cdot 8 \cdot 12x^6} + \frac{210}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16x^8} + \text{etc.} \right) \\ &- 2 \left(\frac{1}{4 \cdot 8x^4} + \frac{9}{4 \cdot 8 \cdot 12x^6} + \frac{107}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16x^8} + \text{etc.} \right) \dots (l2x)^2 \end{aligned}$$

existente $x = \cos. \varphi$. Ad legem huius progressionis clarius percipiendam ponamus $2x = y$, ut sit

$$y = 2 \cos. \varphi$$

et

$$\frac{3}{2} = A = \frac{3}{2}, \quad A \cdot \frac{1}{3} = \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3} = B = \frac{10}{3}, \quad B \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \beta = \frac{3}{2} = A,$$

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = C = \frac{35}{4}, \quad C \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) = \gamma = \frac{107}{24} = B + \frac{1}{2} A A,$$

$$\frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = D = \frac{126}{5}, \quad D \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) = \delta = \frac{55}{4} = C + A B,$$

$$\frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = E = 77, \quad E \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \right) = \varepsilon = \frac{15797}{360} = D + A C + \frac{1}{2} B B$$

etc.

etc.

$$q q = 2 l y \left(\frac{1}{y y} + \frac{A}{y^3} + \frac{B}{y^5} + \frac{C}{y^7} + \frac{D}{y^{10}} + \text{etc.} \right) \\
= 2 \left(\frac{a}{y^4} + \frac{\beta}{y^6} + \frac{\gamma}{y^8} + \frac{\delta}{y^{10}} + \text{etc.} \right) = (l y)^2,$$

ad brevitatē gratia statuemus

$$P = \frac{1}{y y} + \frac{A}{y^3} + \frac{B}{y^5} + \frac{C}{y^7} + \text{etc.},$$

$$q q = 2 P l y = P P = (l y)^2$$

$$q q = (l y + P)^2,$$

est absurdum.

21. Omnino autem notatu digna est ratio, quam hic inter numerorum A, B etc. et numerorum a, β, γ, δ etc. ordines observavi et quae commodissime ita referri potest, ut sit

$$a + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.} = \frac{1}{2} (1 + A z + B z^2 + C z^3 + D z^4 + \text{etc.})^2,$$

quae demonstratio haud parum arduū videtur. Operae igitur pretium est cum horum numerorum accuratius contemplari:

$$\frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 2} + 1,$$

$$a = A \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1^2,$$

$$\frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 3} + A,$$

$$\beta = B \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) + 1 \cdot A,$$

$$\frac{4 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 7}{4 \cdot 4} + B,$$

$$\gamma = C \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) + 1 \cdot B + \frac{1}{2} A A,$$

$$\frac{4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{8 \cdot 9}{5 \cdot 5} + C,$$

$$\delta = D \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) + 1 \cdot C + A B,$$

$$\frac{5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{10 \cdot 11}{6 \cdot 6} + D$$

$$e = E \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \right) + 1 \cdot D + A C + \frac{1}{2} B B$$

etc.

etc.

25. Consideremus hanc proprietatem in sillis numeris integris communis habet binas progressionis:

$$1 = 1,$$

$$\mathfrak{A} = 3,$$

$$\mathfrak{B} = 4 \cdot 5,$$

$$\mathfrak{C} = 5 \cdot 6 \cdot 7,$$

$$\mathfrak{D} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9,$$

$$\mathfrak{E} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11,$$

$$\mathfrak{F} = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$$

etc.

$$a = \mathfrak{A} \cdot \frac{1}{3},$$

$$b = \mathfrak{B} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right),$$

$$c = \mathfrak{C} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right),$$

$$d = \mathfrak{D} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right),$$

$$e = \mathfrak{E} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \right),$$

$$f = \mathfrak{F} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} \right)$$

etc.

oriturque ut sequitur:

$$a = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2}, \quad b = 3\mathfrak{A}, \quad c = 4\mathfrak{B} + 6\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{2}, \quad d = 5\mathfrak{C} + 10\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$e = 6\mathfrak{D} + 15\mathfrak{A}\mathfrak{C} + 20\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}{2}, \quad f = 7\mathfrak{E} + 21\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 35\mathfrak{B}\mathfrak{C} \text{ [et etc.]}$$

seu

$$2f = 7 \cdot 1\mathfrak{E} + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mathfrak{C}\mathfrak{B} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \mathfrak{D}\mathfrak{C} \\ + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \mathfrak{E} \cdot 1,$$

unde lex progressionis est manifesta. Vel erit

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2 \cdot 3} + \frac{c}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{d}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathfrak{A}x}{2} + \frac{\mathfrak{B}x^2}{2 \cdot 3} + \frac{\mathfrak{C}x^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\mathfrak{D}x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right)$$

26. Pro insigni autem hac proprietate sequentem inveni demonstrationem qua simul indoles huiusmodi formularum penitus perspicitur. Ponamus

vatur haec series secundum potestates indicis n , fingaturque

$$\cos. n\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi = y^n (1 + nP + nnQ + n^3R + n^4S + \text{etc.});$$

e forma quo facilius intelligi possit, novo signandi modo utamur, scilicet positis quocumque numeris $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc.

haec scriptio:

denotat

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(1)}$ summam singulorum $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$.

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(2)}$ summam productorum ex binis,

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(3)}$ summam productorum ex ternis,

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(4)}$ summam productorum ex quaternis

etc.

etc.,

observe, si index suffixus aequalis sit multitudini numerorum, hac scriptio omnium productum exprimi, tum vero semper esse

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(0)} = 1.$$

autem scribendi modo adhibito orit

$$P = \frac{1}{1} y^2 + \frac{(3)^{(1)}}{2} y^4 + \frac{(4, 5)^{(2)}}{2 \cdot 3} y^6 + \frac{(5, 6, 7)^{(3)}}{2 \cdot 3 \cdot 4} y^8 + \frac{(6, 7, 8, 9)^{(4)}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y^{10} + \text{etc.},$$

$$Q = \frac{(3)^{(0)}}{2} y^4 + \frac{(4, 5)^{(1)}}{2 \cdot 3} y^6 + \frac{(5, 6, 7)^{(2)}}{2 \cdot 3 \cdot 4} y^8 + \frac{(6, 7, 8, 9)^{(3)}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y^{10} + \text{etc.},$$

$$R = \frac{(4, 5)^{(0)}}{2 \cdot 3} y^6 + \frac{(5, 6, 7)^{(1)}}{2 \cdot 3 \cdot 4} y^8 + \frac{(6, 7, 8, 9)^{(2)}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y^{10} + \text{etc.},$$

$$S = \frac{(5, 6, 7)^{(0)}}{2 \cdot 3 \cdot 4} y^8 + \frac{(6, 7, 8, 9)^{(1)}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y^{10} + \text{etc.},$$

$$T = \frac{(6, 7, 8, 9)^{(0)}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y^{10} + \text{etc.}$$

etc.

Cum autem sit, uti constat,

$$\cos. \lambda n \varphi - V - 1 \cdot \sin. \lambda n \varphi = (\cos. n \varphi - V - 1 \cdot \sin. n \varphi)$$

erit quoque

$$\cos. \lambda n \varphi - V - 1 \cdot \sin. \lambda n \varphi = y^{\lambda n} (1 + n P + n^2 Q + n^3 R +$$

ideoque

$$1 + \lambda n P + \lambda^2 n^2 Q + \lambda^3 n^3 R + \text{etc.} = (1 + n P + n^2 Q + n^3 R +$$

quae aequalitas subsistere nequit, nisi sit

$$Q = \frac{1}{2} P^2, \quad R = \frac{1}{2 \cdot 3} P^3, \quad S = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} P^4, \quad T = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} P^5$$

Atque hinc porro colligere licet, cum sit

$$\cos. n \varphi - V - 1 \cdot \sin. n \varphi = e^{-n \varphi V^{-1}},$$

nunc autem invenerimus

$$\cos. n \varphi - V - 1 \cdot \sin. n \varphi = y^n e^{n P} = e^{n(P+V)},$$

fore

$$- \varphi V - 1 = P + l y$$

ideoque

$$\varphi \varphi = - (P + l y)^2,$$

quod cum videatur absurdum, ita resolvi oportet, quod P semper
tas imaginaria; sicque explicatur paradoxon supra § 23 allatum.

28. Verum ut ad propositum revertar, cum sit $Q = \frac{1}{2} P P$, s
gratia valores § 24 explicatos introducamus, erit

$$P = y y + A y^4 + B y^6 + C y^8 + D y^{10} + \text{etc.}$$

$$Q = \alpha y^4 + \beta y^6 + \gamma y^8 + \delta y^{10} + \text{etc.},$$

unde valoribus Q et $\frac{1}{2}PP$ aequatis nanciscimur supra observatas relationes scilicet

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = A, \quad \gamma = B + \frac{1}{2}AA, \quad \delta = C + AB, \quad \varepsilon = D + AC + \frac{1}{2}BB$$

et ita porro. Hac igitur demonstratione confecta aliarum similium formularum complicatarum resolutionem coronidis loco subiungam.

PROBLEMA

29. *Hanc formulam:*

$$a(1 + V(1 - x))^n$$

in seriem infinitam resolvere secundum potestates ipsius x progredientem.

SOLUTIO

Statuatur

$$z = a(1 + V(1 - x))^n$$

et posita serie, quae quaeritur,

$$z = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

evidens est fore $A = 2^na$, unde sequentes coefficientes simili modo ut supra definire licebit. Sumtis logarithmis habemus

$$lz = la + nl(1 + V(1 - x))$$

et differentiando

$$\frac{dz}{z} = - \frac{ndx}{2V(1-x)} : (1 + V(1-x)).$$

Multiplicetur numerator ac denominator per $(1 - V(1 - x))$ prodibitque

$$\frac{dz}{z} = - \frac{ndx(1 - V(1-x))}{2xV(1-x)} = - \frac{ndx}{2x} - \frac{ndx}{2xV(1-x)}$$

Ponatur

$$z = x^{\frac{n}{2}} \nu,$$

ut sit

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\nu}{\nu} + \frac{n dx}{2x},$$

hietque

$$\frac{d\nu^3}{\nu\nu} = \frac{n n dx^3}{4xx(1-x)}$$

seu

$$4xx(1-x)d\nu^3 = n n \nu \nu dx^3,$$

quae aequatio differentiat et per $2d\nu$ divisa praebet

$$4xx(1-x)dd\nu + 2x(2-3x)dx d\nu - n n \nu dx^3 = 0$$

Cum nunc sit

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{dz}{z} - \frac{n dx}{2x},$$

erit differentiando

$$\frac{dd\nu}{\nu} - \frac{d\nu^2}{\nu\nu} = \frac{ddz}{z} - \frac{dz^2}{zz} + \frac{n dx^3}{2xx};$$

at

$$\frac{d\nu^2}{\nu\nu} = \frac{dz^2}{zz} - \frac{n dx dz}{xz} + \frac{n n dx^3}{4xx},$$

ergo

$$\frac{dd\nu}{\nu} = \frac{ddz}{z} - \frac{n dx dz}{xz} + \frac{n(n+2)dx^3}{4xx},$$

unde facta substitutione:

$$\begin{aligned} 4xx(1-x)\frac{ddz}{z} - 4nx(1-x)\frac{dx dz}{z} + n(n+2)(1-x)dx^3 \\ + 2x(2-3x)\frac{dx dz}{z} - n(2-3x)dx^3 \\ - n n dx^3 \end{aligned}$$

seu

$$4x(1-x)ddz - 4(n-1)dx dz + 2(2n-3)xdx dz - n(n-1)dx^3$$

Cum hic variabilis x partim unicam, partim duas dimensiones obtineat, distinguendo hos terminos

$$+ 4x d d z - 4(n-1) dx dz \\ - 4x x d d z + 2(2n-3) x dx dz - n(n-1) z dx^2 = 0$$

statuamus

$$z = A + Bx + Cxx + Dx^3 + \dots + Mx^i + Nx^{i+1} + \text{etc.}$$

et potestatis x^i coefficientis erit

$$- \{ N(4i(i+1) - 4(n-1)(i+1)) + M(-4i(i-1) + 2(2n-3)i - n(n-1)) \}$$

qui cum evanescere debeat, habebitur

$$N = \frac{(2i-n)(2i-n+1)}{4(i+1)(i-n+1)} M.$$

Nunc autem novimus esse

$$A = 2^n a,$$

quare sequentes coefficientes erunt

$$B = - \frac{n(n-1)}{4(n-1)} A = - \frac{n}{4} A,$$

$$C = - \frac{(n-2)(n-3)}{8(n-2)} B = + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} A,$$

$$D = - \frac{(n-4)(n-5)}{12(n-3)} C = - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} A$$

etc.

etc.

Sumatur $a = 2^{-n}$, ut fiat $A = 1$, eritque

$$\left(1 + \frac{V(1-x)}{2}\right)^n = 1 - \frac{n}{4} x + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} x^2 - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^3 \\ + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^4 - \text{etc.},$$

quo est series quaesita.

COROLLARIUM 1

30. Sumto x negativo sequentis seriei

$$1 + \frac{n}{4}x + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8}xx + \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4$$

summa erit

$$= \left(\frac{1 + \sqrt{1+x}}{2} \right)^n,$$

ex cuius combinatione cum praecedente alternis tantum terminis summa assignari poterit.

COROLLARIUM 2

31. Si exponens n negative capiatur, binae sequentes series ad revocabuntur:

$$1 + \frac{n}{4}x + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8}xx + \frac{n(n+4)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4$$

huius seriei summa est

$$= \left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{2} \right)^{-n} = 2^n \left(\frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \right)^n.$$

Tum

$$1 - \frac{n}{4}x + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8}xx - \frac{n(n+4)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4$$

cuius summa est

$$= 2^n \left(\frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \right)^n.$$

PROBLEMA

32. *Hanc formulam*

$$\left(\frac{V(1+x) + V(1-x)}{2} \right)^n$$

in seriem infinitam resolvere, cuius termini secundum potestates ipsius x direntur.

SOLUTIO

Posito

$$z = \left(\frac{V(1+x) + V(1-x)}{2} \right)^n$$

erit quadratis sumendis

$$zz = \left(\frac{1 + V(1-xx)}{2} \right)^n$$

hincque

$$z = \left(\frac{1 + V(1-xx)}{2} \right)^{\frac{n}{2}},$$

quae forma in priori continetur, si modo ibi loco x et n scribatur $\frac{n}{2}$, quocirca colligitur statim series quaesita:

$$1 - \frac{n}{8}xx + \frac{n(n-6)}{8 \cdot 16}x^4 - \frac{n(n-8)(n-10)}{8 \cdot 16 \cdot 24}x^6 + \frac{n(n-10)(n-12)(n-14)}{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32}x^8$$

quippe cuius summa est

$$= \left(\frac{V(1+x) + V(1-x)}{2} \right)^n.$$

COROLLARIUM

33. Sumto n negativo, ut prodeat haec series:

$$1 + \frac{n}{8}xx + \frac{n(n+6)}{8 \cdot 16}x^4 + \frac{n(n+8)(n+10)}{8 \cdot 16 \cdot 24}x^6 + \frac{n(n+10)(n+12)(n+14)}{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32}x^8$$

quo reducitur ad hanc formam:

$$\left(\sqrt[4]{\frac{1+x}{x}} - \sqrt[4]{\frac{1-x}{x}} \right)^n.$$

SCHOLIUM

34. Omnes series istas, quarum summam hic assignavi, in hac complecti licet:

$$s = 1 + \frac{n}{1}y + \frac{n(n+3)}{1 \cdot 2}yy + \frac{n(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}y^4 + \dots$$

eritque

$$s = \left(1 + \frac{\sqrt[4]{1-4y}}{2} \right)^{-n};$$

unde patet, si fuerit $4y > 1$, seriei summam esse imaginariam, realom si sit $4y < 1$. Casu autem $y = \frac{1}{4}$ erit, uti iam supra observavimus,

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} + \text{etc.} =$$

Verum illa series pluribus modis transformari potest, ex quibus hunc casum affero, qui oritur differentialibus sumtis; erit scilicet

$$\frac{ds}{dy} = n + \frac{n(n+3)}{1}y + \frac{n(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2}yy + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 + \dots$$

At est

$$\frac{ds}{dy} = + n \left(\frac{1 + \sqrt[4]{1-4y}}{2} \right)^{-n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1-4y}}.$$

re per n dividendo, huius seriei

$$1 + \frac{n+3}{1}y + \frac{(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2}yy + \frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 + \text{etc.}$$

ma est

$$= \frac{1}{V(1-4y)} \left(1 + \frac{V(1-4y)}{2} \right)^{-n+1}.$$

scribendo $n = m - 3$, huius seriei

$$1 + \frac{m}{1}y + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2}yy + \frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 \\ + \frac{(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}y^4 + \text{etc.}$$

ma est

$$= \frac{1}{V(1-4y)} \left(1 + \frac{V(1-4y)}{2} \right)^{-m+2}.$$

CONTINUATIO FRAGMENTORUM EX ADVERSARIIS MATHEMATICIS DE PROMPTORIUM¹⁾

Ex Commentatione 819 indicis ENESTROEMIANI

Opera postuma I, 1862, p. 506--513

106

(KRAFFT)

PROBLEMA

Si habeatur haec series

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+4a} - \text{etc.},$$

eius quadratum s^2 commode per seriem exprimere.

Erit autem

$$s^2 = 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \frac{1}{(1+3a)^2} + \text{etc.}$$

$$- \frac{2}{1 \cdot (1+a)} - \frac{2}{(1+a)(1+2a)} - \frac{2}{(1+2a)(1+3a)} - \text{etc.} \dots (= -$$

$$+ \frac{2}{1 \cdot (1+2a)} + \frac{2}{(1+a)(1+3a)} + \frac{2}{(1+2a)(1+4a)} + \text{etc.} \dots (= -$$

$$- \frac{2}{1 \cdot (1+3a)} - \frac{2}{(1+a)(1+4a)} - \frac{2}{(1+2a)(1+5a)} - \text{etc.} \dots (= -$$

etc.

Erit vero

$$A = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{(1+a)(1+2a)} + \frac{1}{(1+2a)(1+3a)} + \text{etc.}$$

1) Vide notam 1 ad p. 504 vol. Ie adiectam.

$$A = \frac{1}{a} \cdot 1.$$

$$= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+4a} + \frac{1}{1+a} - \text{etc.} \right)$$

$$B = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}.$$

modo

$$i \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+4a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+5a} + \frac{1}{1+3a} - \frac{1}{1+6a} + \text{etc.} \right)$$

$$C = \frac{1}{3a} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} \right)$$

porro. Quocirca fiet

$$x^3 = 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \frac{1}{(1+3a)^2} + \text{etc.}$$

$$= \frac{2}{a} \cdot 1 + \frac{2}{2a} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} \right) - \frac{2}{3a} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} \right) + \text{etc.},$$

partis posterioris valor ita investigetur: Ponatur

$$z = -\frac{2x}{a} + 1 + \frac{2x^2}{2a} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} \right) - \frac{2x^3}{3a} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} \right) + \text{etc.}$$

$$\frac{x}{a} = -\frac{2}{a} \cdot 1 + \frac{2x}{a} \left(1 + \frac{1}{1+a}\right) - \frac{2x^2}{a} \left(1 + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right) + \text{etc.},$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2x}{a} \cdot 1 + \frac{2x^2}{a} \left(1 + \frac{1}{1+a}\right) \quad \text{-- etc.}$$

adeoque

$$\frac{(1+x)dz}{dx} = -\frac{2}{a} + \frac{2x}{a(1+a)} - \frac{2x^2}{a(1+2a)} + \text{etc.}$$

Ponatur $x = y^a$, ut habeatur

$$\frac{(1+y^a)dz}{ay^{a-1}dy} = -\frac{2}{a} + \frac{2y^a}{a(1+a)} - \frac{2y^{2a}}{a(1+2a)} + \text{etc.}$$

sen

$$\frac{(1+y^a)dz}{y^{a-2}dy} = -\frac{2y}{1} + \frac{2y^{a+1}}{1+a} - \frac{2y^{2a+1}}{1+2a} + \text{etc.},$$

$$d \cdot \frac{(1+y^a)dz}{y^{a-2}dy} = -2 + 2y^a - 2y^{2a} + 2y^{3a} - \text{etc.} = -\frac{2}{1+y^a},$$

ergo

$$\frac{(1+y^a)dz}{y^{a-2}dy} = -2 \int \frac{dy}{1+y^a}$$

et

$$dz = -\frac{2y^{a-2}dy}{1+y^a} \int \frac{dy}{1+y^a},$$

consequenter

$$z = -2 \int \frac{y^{a-2}dy}{1+y^a} \int \frac{dy}{1+y^a}.$$

Posito ergo $y = 1$ erit quadratum quaesitum

$$s^2 = 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \text{etc.} + z.$$

Hic vero occurrit casus memorabilis, quando $a = 2$ ideoque

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.} = \frac{\pi}{4};$$

tum autem fit

$$z = -2 \int \frac{dy}{1+y^2} \int \frac{dy}{1+y^2} = -(\text{Arc. tang. } y)^2 = -\frac{\pi^2}{16},$$

unde tandem oritur

$$s^2 = \frac{\pi^2}{16} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} - \frac{\pi^2}{16}$$

quo

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{8}.$$

autem fuerit $a = 1$ ideoquo

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = \log. 2,$$

$$z = -2 \int \frac{dy}{y(1+y)} \int \frac{dy}{1+y} = -2 \int \frac{dy \log.(1+y)}{y(1+y)}.$$

ponendum erit post integrationem $y = 1$, eritque

$$s^2 = (\log. 2)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} - 2 \int \frac{dy \log.(1+y)}{y(1+y)}.$$

Adversaria mathematica t. I, p. 162—164.

107

(N. FUSS)

THEOREMA

Proposita serie potestatum quacunque

$$P = 1 + x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + x^\delta + \text{etc.}$$

ue sumatur potestas exponentis λ , nempe P^λ , in qua evoluta occurrat terminus
, eius coëfficiens $[n]$ ita pendebit ab aliquibus praecedentibus, ut sit

$$n[n] = \frac{+\lambda\alpha}{-(n-\alpha)}[n-\alpha] - \frac{+\lambda\beta}{-(n-\beta)}[n-\beta] - \frac{+\lambda\gamma}{-(n-\gamma)}[n-\gamma] + \text{etc.},$$

expressio consueque est continuanda, quamdiu numeri $n - \alpha$, $n - \beta$, $n - \gamma$ etc.
fiunt negativi.

DEMONSTRATIO

Ponatur $P^\lambda = S$, erit

$$\lambda S = \lambda P \quad \text{et} \quad \frac{dS}{S} = \frac{\lambda dP}{P}$$

quo

$$PdS = \lambda SdP,$$

quae aequalitas ita repraesentetur:

$$P \cdot \frac{xdS}{dx} = \lambda S \cdot \frac{xdP}{dx}.$$

Cum igitur sit

$$P = 1 + x'' + x' + x' + \text{etc.},$$

erit

$$\frac{xdP}{dx} = \alpha x'' + \beta x' + \gamma x' + \delta x' + \text{etc.}$$

Iam in serie S occurrat terminus $[n]x^n$, praeter quem potestates, quae per $\frac{xdP}{dx}$ multiplicatae producere possunt termini ita repraesententur:

$$S = \dots + [n]x^n + [n - \alpha]x^{n-\alpha} + [n - \beta]x^{n-\beta} +$$

Hinc ergo erit

$$\lambda S \frac{xdP}{dx} = \dots \lambda \alpha [n - \alpha]x^n + \lambda \beta [n - \beta]x^n + \lambda \gamma [n - \gamma]x^n +$$

Deinde cum ex iisdem terminis sit

$$\frac{xdS}{dx} = \dots n[n]x^n + (n - \alpha)[n - \alpha]x^{n-\alpha} + (n - \beta)[n - \beta]x^{n-\beta} +$$

quae in P ducta pro potestate x^n praebet sequentes terminos

$$n[n]x^n + (n - \alpha)[n - \alpha]x^n + (n - \beta)[n - \beta]x^n + (n - \gamma)[n - \gamma]x^n +$$

Hi igitur termini x^n utrinque debent poni aequales, unde

$$\begin{aligned} n[n] + (n - \alpha)[n - \alpha] + (n - \beta)[n - \beta] + (n - \gamma)[n - \gamma] \\ = \lambda \alpha [n - \alpha] + \lambda \beta [n - \beta] + \lambda \gamma [n - \gamma] + \lambda \delta [n - \delta] \end{aligned}$$

unde conficitur

$$n[n] = -\frac{\lambda \alpha}{(n - \alpha)}[n - \alpha] - \frac{\lambda \beta}{(n - \beta)}[n - \beta] - \frac{\lambda \gamma}{(n - \gamma)}[n - \gamma] - \frac{\lambda \delta}{(n - \delta)}[n - \delta]$$

Q. E. D.

COROLLARIUM

Cum in serie P exponentes ipsius x sint $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., in serie $S = P$ potestates non occurrunt, nisi quarum exponentes sunt summa λ terminum huius seriei $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., unde si in hac serie S omnes plane potestates ipsius x occurrant, id erit indicio omnes plane numeros reduci posse ad summam λ terminorum istius seriei $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. At si quacumque potestas x^n non occurrat, tum eius coefficientens $[n]$ acquabitur nihilo. Manifestum autem est nullum coefficientem fieri posse negativum.

Adversaria mathematica t. I, p. 335, 336.

108
(N. Fuss)

THEOREMA

Summa huius seriei:

$$S = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \text{etc.}$$

$$S = \frac{\pi\pi}{12} + \frac{1}{2} (l2)^3.$$

DEMONSTRATIO

Colligantur primo ultimi termini cuiusque membri, qui erunt

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6}.$$

Inde his terminis exclusis colligantur denuo termini extremi cuiusque membri

$$-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} - \text{etc.} = -1.$$

His deletis colligantur denovo ultimi termini, qui sunt

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \text{etc.} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right).$$

Simili modo ultimi sequentes erunt

$$-\frac{1}{1 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 6} - \frac{1}{4 \cdot 7} - \text{etc.} = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

Eodem modo sequentium summa erit

$$+ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

sicque porro. Quare si statuamus

$$t = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \text{etc.}$$

erit

$$S = \frac{\pi\pi}{6} - t.$$

Iam istam seriem postremam ita repraesentemus:

$$t = x - \frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^3}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{x^4}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \text{etc.}$$

unde sumto $x = 1$ nostra series t prodit. Nunc autem fiet

$$\frac{dt}{dx} = 1 - x \left(1 + \frac{1}{2} \right) + x^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - x^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \text{etc.}$$

unde termini primi singulorum terminorum iuncti dant

$$1 - x + xx - x^3 + \text{etc.} = \frac{1}{1+x}.$$

Colligantur porro secundi

$$- \frac{1}{2} (x - xx + x^3 - x^4 + \text{etc.}) = \frac{-\frac{1}{2}x}{1+x}.$$

Tertii dabunt

$$+ \frac{1}{3} (xx - x^3 + x^4 - x^6 + \text{etc.}) = \frac{\frac{1}{3}xx}{1+x}.$$

Sequentes erunt

$$\frac{-\frac{1}{4}x^3}{1+x}, \quad \frac{+\frac{1}{5}x^4}{1+x} \quad \text{etc.}$$

Quamobrem erit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx - \frac{1}{4}x^3 + \text{etc.}}{1+x}$$

fractio, cuius numerator = $\frac{1}{x} l(1+x)$, sicque

$$\frac{dt}{dx} = \frac{l(1+x)}{x(1+x)}.$$

Cum igitur sit

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x},$$

per partes erit

$$dt = \frac{dx}{x} l(1+x) - \frac{dx}{1+x} l(1+x),$$

cuius posterioris membri integrale est

$$- \frac{1}{2} (l(1+x))^2 = - \frac{1}{2} (l2)^2.$$

Pro priore membro

$$\int \frac{dx}{x} l(1+x),$$

id erit

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} \left(x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.} \right) \\ = x - \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Unde facto $x=1$ erit haec pars

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12}.$$

Consequenter habebimus

$$t = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2} (l2)^2,$$

ergo summa seriei propositae

$$S = \frac{\pi\pi}{12} + \frac{1}{2} (l2)^2.$$

THEOREMA

Sequentis scribi

$$S = 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{7} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \text{etc.}$$

somma erit

$$S = \frac{3\pi^2}{32}.$$

DEMONSTRATIO

Colligantur hic iterum termini postremi singulorum mem-

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \frac{1}{n^2}.$$

His deletis reliquorum ultimi termini colligantur, qui sunt

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \text{etc.} = \frac{1}{n} - 1.$$

Sequentium ultimi dant

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \text{etc.} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \right);$$

sequentes erunt

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \text{etc.} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

et ita porro. Hinc erit

$$S = \frac{x^2}{8} = T$$

existente

$$T = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \text{etc.}$$

Stulantur

$$T = \frac{x^2}{2} \cdot 1 + \frac{x^4}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{x^6}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \text{etc.}$$

hæcque

$$\frac{dt}{dx} = 1 + x + x^3 \left(1 + \frac{1}{3} \right) + x^5 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \text{etc.}$$

secundi termini

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \text{etc.} = \frac{x}{1+xx}$$

sequentos dabunt

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{1+xx},$$

quo erit

$$+\frac{1}{5} \cdot \frac{x^5}{1+xx},$$

sequentor

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \text{etc.}}{1+xx} = \frac{\text{Arc. tang. } x}{1+xx},$$

ius integrale

$$t = \int \frac{dx}{1+xx} \int \frac{dx}{1+xx},$$

ne sumto $x=1$ erit

$$t = \frac{1}{2} (\text{Arc. tang. } x)^2.$$

sequentor

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi\pi}{16} = \frac{\pi\pi}{32},$$

$$S = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{\pi\pi}{32} = \frac{3\pi\pi}{32}.$$

COROLLARIUM

Inventa hac summa si ipsam seriem propositam ita tractemus:

$$S = x - \frac{x^3}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{x^5}{5} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.},$$

fiat

$$\frac{dS}{dx} = 1 - xx \left(1 - \frac{1}{3}\right) + x^4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.},$$

ini primi dant

$$1 - xx + x^4 - x^6 + \text{etc.} = \frac{1}{1+xx},$$

ndi

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{xx}{1+xx},$$

tertii

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{x^4}{1+xx}$$

ideoque

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{x(1+xx)} \int \frac{dx}{1+xx}$$

Est vero

$$\frac{1}{x(1+xx)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+xx},$$

ergo

$$S = \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{1+xx} - \int \frac{xdx}{1+xx} \int \frac{dx}{1+xx}.$$

Cum igitur sit

$$\int \frac{dx}{1+xx} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \text{etc.},$$

erit

$$\int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{1+xx} = x + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} + \frac{x^7}{7^2} + \text{etc.}$$

Posito ergo $x=1$ erit

$$\int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{1+xx} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8}.$$

Quare, cum $S = \frac{3\pi\pi}{32}$, erit

$$\frac{3\pi\pi}{32} = \frac{\pi\pi}{8} - \int \frac{xdx}{1+xx} \int \frac{dx}{1+xx};$$

unde sequitur

$$\int \frac{xdx}{1+xx} \int \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi\pi}{32},$$

quem valorem non video quomodo directe erui posset.

Hanc seriem secundum numeros primos progredientem:

$$s = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \text{etc.},$$

si numeri primi formae $4n - 1$ habent signum $+$, reliqui formae $4n + 1$ si-
um $-$, in seriem convergentem convertere.

SOLUTIO

Hoc duplici modo fieri potest. Cum enim primo sit¹⁾ productum

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \text{ etc.} = 1,$$

denominatores sunt numeri primi, numeratores vero pariter pares unitate
et maiores vel minores, sequitur fore

$$s = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - 1 \right) + \frac{1}{7} \left(1 - \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\pi}{4} \right) \\ + \frac{1}{11} \left(1 - \frac{4 \cdot 4 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\pi}{4} \right) + \text{etc.}$$

unde cum sit²⁾

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{14}{13} \text{ etc.} = 1,$$

et sequitur fore

$$s = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{1}{5} \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{7} \left(\frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \right) \\ - \frac{1}{11} \left(\frac{2 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{1}{13} \left(1 - \frac{2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \text{etc.},$$

ut ambae series manifesto valde convergant.

1) Vido Commentationem 72 indicis ENESTROEMIANI, theorema 11, *LEONARDI EULERI Opera*
omnia, vol. II, p. 233. O. B.

2) Ibidem, theorema 14, loco citato p. 236. C. B.

THEOREMA

Posito $\frac{\pi}{4} = q$, si summae sequentium serierum ponantur

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} = Aq,$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.} = 2Bqq,$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.} = 4Cq^3,$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.} = 8Dq^4$$

etc.

coëfficientes ita a se invicem pendent, ut sit¹⁾

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = \frac{2AB}{4}, \quad D = \frac{2AC + BB}{6}, \quad E = \frac{2AD + 8C^2}{8}$$

$$F = \frac{2AE + 2BD + CC}{10} \quad \text{etc.,}$$

unde colliguntur isti valores:

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{3}, \quad E = \frac{5}{24}, \quad F = \frac{2}{15}, \quad G = \frac{61}{720},$$

etc.,

ubi insuper litterae seorsim per 1, 2, 4, 8, 16, 32 etc. multiplicatae. Hinc istos numeros ulterius continuavi²⁾, quos ergo cum potestatibus sequenti modo repraesento. Prior columna valet pro potestatibus posterior vero pro paribus:

1) Confer Commentationem 130 indicis ENESTROEMIANI § 11, LEONHARDI EULERI vol. II, p. 418. C. B.

2) Ibidem § 10, vol. II, p. 416. C. B.

$$Aq = 1 \cdot q,$$

$$Bq^2 = 1 \cdot 2q^2,$$

$$Cq^3 = \frac{1}{2} \cdot 4q^3,$$

$$Dq^4 = \frac{1}{3} \cdot 8q^4,$$

$$Eq^5 = \frac{5}{8 \cdot 3} \cdot 16q^5,$$

$$Fq^6 = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot 32q^6,$$

$$Gq^7 = \frac{61}{16 \cdot 9 \cdot 5} \cdot 64q^7,$$

$$Hq^8 = \frac{17}{9 \cdot 5 \cdot 7} \cdot 128q^8,$$

$$Jq^9 = \frac{277}{128 \cdot 9 \cdot 7} \cdot 256q^9,$$

$$Kq^{10} = \frac{2 \cdot 31}{81 \cdot 5 \cdot 7} \cdot 512q^{10},$$

$$Lq^{11} = \frac{19 \cdot 2659}{256 \cdot 81 \cdot 25 \cdot 7} \cdot 1024q^{11}$$

$$Mq^{12} = \frac{2 \cdot 691}{81 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 11} \cdot 2048q^{12}$$

etc.

etc.

Quodsi litterae posterioris columnae ordine dividantur per hos numero 2 · 15, 2 · 63 etc., produnt meae fractiones $\frac{1}{6}, \frac{1}{90}, \frac{1}{945}, \frac{1}{9450}$ etc.¹⁾

Supra habuimus haec duo producta:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \text{etc.} = 1$$

et

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdot \text{etc.} = 1;$$

horum prius per posterius divisum dat

$$1 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{20}{18} \cdot \text{etc.} = 1.$$

Haec fractiones invertantur et sumantur logarithmi, eritque

$$l \frac{6}{4} + l \frac{6}{8} + l \frac{10}{12} + l \frac{14}{12} + \text{etc.} = 0.$$

Cum igitur sit

$$l \frac{6}{4} = l \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}, \quad l \frac{6}{8} = l \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \quad \text{etc.},$$

1) Ibidem § 29, loco citato p. 440.

evolutis logarithmis semissis dabit hanc aequationem:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} \\ & - \frac{1}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7^3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7^7} \\ & - \frac{1}{11} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{11^3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{11^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11^7} \\ & + \frac{1}{13} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{13^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{13^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{13^7} \\ & \text{etc.} \end{aligned} \right\} \text{etc.} =$$

Hinc ergo erit

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \text{etc.} \\ & + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{17^3} - \text{etc.} \right) \\ & + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} - \frac{1}{11^5} + \frac{1}{13^5} + \frac{1}{17^5} - \text{etc.} \right) \\ & \text{etc.} \end{aligned} \right\} =$$

Hinc porro

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \text{etc.} &= S = \frac{1}{3} \\ &+ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} \right. \\ &+ \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} - \frac{1}{11^5} \right. \\ &+ \frac{1}{7} \left(\frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} - \frac{1}{11^7} \right. \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Unde sequitur nostram seriem S aliquantillo maiorem esse

OBSERVATIO

Per similes rationes inveni, si omnes numeri primi in duas partes dividantur unitate differentes, ac pro numeris primis formae $8n + 1$ vel $8n + 3$ partes maiores pro numeratoribus, minores vero pro denominatoribus sumantur; pro his autem numeris $8n - 1$ vel $8n - 3$ minores pro numeratoribus et maiores pro denominatoribus sumantur, productum omnium harum fractionum erit $= 1$, hoc est

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \text{etc.} = 1.$$

COROLLARIUM

Transformatio seriei

$$S = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \text{etc.}$$

etiam hoc modo¹⁾ referri potest:

1) Huius transformationis demonstratio EULERI more conficienda hoc exemplo illustretur:
Sic

$$P = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} + \text{etc.};$$

erit

$$P \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} - \frac{1}{21^2} + \frac{1}{27^2} \dots \text{etc.},$$

unde oritur

$$P \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) = 1 + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} - \text{etc.}$$

Similiter, cum sit

$$P \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{25^2} - \frac{1}{35^2} - \frac{1}{55^2} + \frac{1}{65^2} + \text{etc.},$$

erit

$$P \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{5^2} \right) = 1 - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} - \frac{1}{19^2} - \text{etc.}$$

Porro est

$$P \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{5^2} \right) \frac{1}{7^2} = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{49^2} - \frac{1}{77^2} + \frac{1}{91^2} + \frac{1}{119^2} - \text{etc.},$$

unde fit

$$P \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{5^2} \right) \left(1 + \frac{1}{7^2} \right) = 1 - \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} - \frac{1}{19^2} - \frac{1}{23^2} + \text{etc.}$$

$$\begin{aligned}
S = & \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(P \left(1 + \frac{1}{3^3} \right) \left(1 - \frac{1}{5^3} \right) \left(1 + \frac{1}{7^3} \right) \text{etc.} - 1 + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} - \right. \\
& + \frac{1}{5} \left(Q \left(1 + \frac{1}{3^5} \right) \left(1 - \frac{1}{5^5} \right) \left(1 + \frac{1}{7^5} \right) \text{etc.} - 1 + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{11^5} - \right. \\
& + \frac{1}{7} \left(R \left(1 + \frac{1}{3^7} \right) \left(1 - \frac{1}{5^7} \right) \left(1 + \frac{1}{7^7} \right) \text{etc.} - 1 + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{11^7} - \right. \\
& \left. \text{etc.,} \right.
\end{aligned}$$

ubi

$$P = 4 C q^3, \quad Q = 16 E q^5, \quad R = 64 G q^7 \quad \text{etc.}$$

Adversaria mathematica t. III, p. 104—107.

Similibus operationibus pro singulis numeris primis imparibus institutis omnes sorori ter primum tollentur reperiaturque

$$P \left(1 + \frac{1}{3^3} \right) \left(1 - \frac{1}{5^3} \right) \left(1 + \frac{1}{7^3} \right) \text{etc.} = 1.$$

Confer e.g. demonstrationem theorematis 8 in Commentatione 72 indicis ENESTROEMIANI
LEONHARDI EULERI Opera omnia, vol. III, p. 230. C. B.

INDEX NOMINUM

QUAE TOMIS 14, 15, 16 INSUNT

- H., 15 2
 J. C., 15 92, 116
 vide METIUS
 F. D. TH., 15 208, 211
 W., 14 159
 ZOON, ADRIAN, 14 197 (vide METIUS)
 DES, 14 142, 204, 245, 246
 7
 C. G., 15 526
 OM, C. A., 14 159
 LL, DANIEL, 14 139, 141, 161, 162,
 138, 169, 213, 216, 498
 , 169
 241, 251, 253
 LL, JAC., 14 160, 161, 175, 178
 92, 93
 LL, JOH., 14 111, 139, 159, 161, 162,
 155, 166, 169, 173, 542, 544, 585
 LL, NIC., 14 140, 161, 164, 169, 170,
 73
 JANI (numeri), 14 175
 92, 100, 569, 571, 594, 598
 57, 131, 184, 186
 B., 15 495
 14 196
 UL, A. VON, 15 495
- BRIGGS, H., 14 249
 BROUNCKER, W., 14 189, 294, 300, 302, 303,
 304, 316, 318, 323
 15 325, 673
 16¹ 36, 43, 44
 16² 178, 185, 186
 CANTOR, M., 14 159, 160, 161, 175
 CAPELLA, MARTIANUS, 14 196
 CARTESIUS, R., 15 1, 2, 3, 4, 6, 7
 CASTILLIONEUS, J., 14 376
 15 207
 CAUCHY, A. L., 14 165
 CEULEN, L. VAN, 14 178
 16² 1, 3, 267
 COLLEN, vide CEULEN
 COLLINS, J., 15 495
 CONDORCET, A. M. Marquis DE, 15 268, 295,
 297, 528
 COUSIN, V., 15 2
 CRAMER, G., 14 141, 169, 170
 DIOPHANTUS, 15 205, 526
 ENESTRÖM, G., 14 159, 161, 162, 165
 15 116
 ENESTROEMIANUS, passim (Index E. Com-
 mentationum EULERI)
 EULER, J. A., 14 156
 EULER, L., 14 1 (Commentationes 122, 254,
 321, 640 indicis ENESTROEMIANI), 2 (Epi-
 stola ad GOLDBACH scripta), 10 (Comment.
 61), 30 (61), 42 (20), 60 (19), 72 (72), 73

118, 122 (*Introd.*), 124 (46, 47), 125 (47),
 127 (47), 138 (41, 63, 130), 139, 140 (47),
 141, 142, 143, 146 (60), 152 (41), 156—176
 (25, 41, 60, 61, 130, 594, 597, 736, 820,
Epistola ad N. BERNOULLI data, Introd.: Inst. calc. diff.), 177 (41), 181 (41), 187
 (123), 189 (123), 209, 216, 226 (41), 246,
 250 (55), 257 (561), 261, 262 (19), 269,
 291 (71), 301 (122), 306 (19), 315 (122),
 322 (122), 333 (122), 334 (122), 345
 (71), 353 (25, 47), 357, 360 (130), 364
 (*Introd.*, 122, 130), 373 (122, *Introd.*),
 379, 388, 407 (41, 61, 63), 408, 416, 427
 (*Inst. calc. diff.*), 434 (25, 47, 55), 443
 (352, 432), 452 (63, 705, 809), 464 (188),
 466 (190), 468 (*Introd.*), 471 (62, *Introd.*),
 477 (41, 61, 63, 130), 489 (130, *Introd.*),
 491 (130), 493 (*Introd.*), 514 (41, *Inst. calc. diff.*), 516 (189), 520 (189, 190), 542
 (686, 703, 704, 747, 810), 543 (120, *Introd.*,
Inst. calc. diff.), 584 (61, 130), 585 (*Inst. calc. diff.*, 168, 169, 616), 606 (71, 123,
Introd.), 613 (71, 123), 617
 15 12 (561), 17 (71, 74, 123, 281), 26 (281),
 31 (323), 32 (280), 33 (71, 123, *Introd.*),
 34 (71), 50 (551), 70 (432), 71 (247),
 73 (41, 61, 63, 130), 75 (25, 47, 55),
 82 (19, 128, 421), 83 (19, 421), 91 (25,
 47, 55, 63, 125, 130, 352, 746, 368,
Introd.; Inst. calc. diff.), 92 (47, 55, 63,
Inst. calc. diff. 352), 94 (130), 100 (25, 47,
 55, *Inst. calc. integr.*), 115 (43), 116 (47,
 432, 583, *epistola ad JOH. BERNOULLI data, Inst. calc. diff., Inst. calc. integr.*), 129 (499,
 752), 130 (246), 131 (352), 132 (352),
 135 (19), 136 (352), 137 (368, *Inst. calc. diff.*), 138 (393), 143 (465), 150 (393),
 168, 169 (247), 183 (*Introd.*), 184 (*Inst. calc. diff.*), 186 (*Introd.*), 190 (*Introd.*),
 205 (29, 323, 559, *Algebra*), 207 (575, 584,

(41), 241 (41, 130), 244 (130),
 (61, *Introd.*), 301 (*Inst. calc. diff.*),
 123, *Introd.*), 325, 338 (122, 123,
Introd.), 342 (122), 344 (122),
 383 (326), 400 (522, 593, 74),
 435 (189), 452 (122), 455 (61),
 462 (130, *Introd.*), 464 (321,
calc. integr.), 481 (122), 493 (130,
 499 (74), 507 (562), 509 (*Introd.*,
 394), 528 (521, 584, 663, 726,
 530 (321), 535 (254), 559 (254,
integr.), 563 (41, *Introd.*), 566
 393, *Inst. calc. diff.*), 573 (130,
Inst. calc. diff.), 576 (25, 47, 55,
calc. diff.), 581 (597, *Introd.*), 584
 55, 130), 596 (25, 47, 55, 63,
calc. diff.), 598, 602 (629, *Inst. calc. diff.*),
 604 (575), 607 (575), 619 (575,
 620 (19, 421), 621 (*Introd.*),
 625 (61, *Introd.*), 630 (61, *Introd.*,
 247), 661 (71, 123, *Introd.*),
 686 (522, 553), 691 (522), 700
 63, 130, 393), 702 (59, 60, 462,
integr.), 709 (130), 711 (47, 55,
 583, *Introd.*), 716 (130, *Inst. calc. diff.*),
 720 (128, *Introd.*)
 16' 1 (*Inst. calc. diff.*), 14 (20,
diff.), 16, 17 (*Inst. calc. diff.*), 20
 (247), 36 (247, 522, 593, 594), 40
 47 (47, 55, *Inst. calc. diff.*), 48, 49
 56 (*Introd.*), 65 (*Inst. calc. diff.*),
 (247), 79 (562), 112 (465, 575,
 726, 750, 768, *Inst. calc. diff.*),
 129 (47), 131 (47), 139 (*Inst. calc. diff.*),
 140 (47), 141 (19), 142 (19),
 163, 164, 178 (652), 186 (393),
 575, 584, 637, 662, 726, 743)
 (575), 196 (575, 662), 198 (19,
 575, 640, 662, *Inst. calc. integr.*),
 254, *Inst. calc. integr.*), 207

(*Introd.*), 267 (651), 281 (*epistola ad GOLDBACH* data), 282 (247, 703, 704, 747, 810), 283, 311 (246, 686, 704, 747, 810), 312, 333 (247, 686, 703, 747, 810), 335 (120), 342 (120)
 16^2 1 (74, 809), 2, 4 (74), 21 (705), 28 (326, 551, 722), 42 (674), 51 (672, 673, 674), 56 (326, 551, 709), 57 (326, 709), 87 (246), 104, 105 (575), 112, 117 (20, 41, 61, 63, 130, 597), 118 (20), 139 (71, 123, 522, 553, 593, 616, 745, 750, *Introd.*), 160 (575), 178 (71, 123, 522, 593, *Introd.*), 200 (25, 41, 47, 55, 61, 63, 130, 189, 352, 393, *Introd.*, *Inst. calc. diff.*), 205 (41, 61, 63, 130, 597), 206 (597), 207 (47), 214 (686, 703, 704), 238 (594), 241 (19, 421), 242 (19, 421), 258 (254), 261 (254), 264 (575), 267 (74, 125, 275, 561), 269 (74), 284 (247, 686, 703, 704, 747), 323 (72), 324 (130), 328 (72)
 FERMAT, P. DE, 15 526
 FONTENELLE, B. DE, 14 161
 FOURIER, J. S., 16¹ 333
 FRIEDLEIN, G., 14 196
 FUSS, N., 14 156, 157, 158, 159
 16^2 315, 317
 FUSS, P. H. VON, 14 2, 139, 141, 156, 157, 158, 159, 209, 216
 15 217
 16¹ 281
 FUSS, V., 14 157
 GAUSS, C. F., 14 157, 158, 159, 173
 15 526
 GERHARDT, C. L., 14 79, 376, 587
 15 447, 636
 GIRARD-NEWTONSche Formeln, 14 163, 167
 GLAISHER, J. W. L., 15 716
 GOLDBACH, C., 14 2, 72, 139, 142, 161, 162, 209, 216, 217, 226
 15 217, 218
 16¹ 281

16^2 186
 HAGEN, J. G., 14 158, 165
 HALLEY, E., 14 249, 399
 HARZER, P., 14 165
 HEIBERG, J. L., 14 245
 HENRY, CH., 15 526
 HIPPIAS, 15 15
 HOBSON, E. W., 14 142, 245
 HOSPITAL, G. F. DE L', 14 585
 15 301
 HUYGENS, CHR., 14 142, 204, 245
 15 1
 JACOB, C. G. J., 14 158, 159
 JOFFE, S. A., 15 716
 JONES, W., 14 246
 JULIANUM (CALENDARUM), 14 199
 KEULEN, vide CEULEN
 KOPP, U. F., 14 196
 KRAFFT, G. W., 16² 312
 KRAZER, A., 16¹ 267
 LAGNY, TH. F. DE, 14 246
 16^2 3, 25, 267, 268, 270, 277
 LAGRANGE, J. L., 16² 232
 LAMBERT, J. H., 14 142, 204, 245, 5
 15 1
 16^2 238
 LANDAU, E., 15 70
 LEFORT, F., 15 495
 LEGENDRE, M. A., 14 142, 204, 245
 15 1, 573
 LEIBNIZ, G., 14 79, 82, 140, 148, 14
 255, 376, 585, 587, 589
 15 447, 636
 16¹ 36, 43, 44
 16^2 1, 3, 5, 24, 186
 MACHIN, J., 14 246
 16^2 3, 25, 267
 MACLAURIN, C., 14 161
 MARTIANUS CAPELLA, vide CAPELLA
 MASCHERONI, L., 15 116, 129

METIUS, ANTONISZON, A., 14 191
 15 1
 16² 267, 809
 MOIVRE, A. DE, 14 175, 497, 498
 15 92, 170
 NEWTON, J., 14 77, 82, 163, 167, 170, 360,
 376, 465
 15 207, 208, 211, 215, 216, 495
 16¹ 112 sq.
 16² 65, 273
 NIELSEN, N., 15 92
 OLDENBURG, H., 14 82, 376
 15 207, 495
 PELL, J., (problema *Pellianum*), 15 31, 205
 PFAFF, J. F., 14 159
 PÓLYA, G., 16¹ 244
 REIFF, R., 14 159
 RICCATI, J., 14 213, 346
 16¹ 34, 37
 RIEMANN, B. (RIEMANNsche Zetafunktion),
 15 70
 RUDIO, F., 14 142, 204, 245, 257
 15 1, 15, 526
 SAALSCHÜTZ, L., 15 92

SHARP, A., 14 249, 573
 16² 3, 25, 267
 SHERWIN, H., 14 249
 SIMPSON, TH., 14 174
 STAECKEL, P., 14 73, 141, 156
 452, 480
 15 598
 16¹ 131
 STAINVILLE, J. DE, 14 165, 173
 STIELTJES, F. J., 15 573
 STIRLING, J., 14 161, 514
 15 123
 TANNERY, P., 15 2, 526
 TAYLOR, B., 14 109, 110
 VEGA, G. DE, 14 246
 VIETA, FR., 14 257, 261
 15 12, 495
 WALLIS, J., 14 3, 114, 160, 183
 232, 236, 249, 261, 265, 300
 303, 373, 512, 587, 594
 15 34, 124, 325, 340, 563
 16¹ 34, 36, 43, 44, 140, 141, 15
 16² 178, 179, 184, 194, 242
 WOLF, C., 14 587